実力をつけるために…

どうしたら自転車が上手に乗れるようになるのだろうか？
補助輪を付けて練習した人もいたでしょう．何度も転んで怪我をして，それでも諦めずに乗り続けることで，上手く乗れるようになりました．自転車に３回しか乗ったことがない人と 300 回乗ったことがある人ではどちらが上手に乗れるでしょうか．その答は明白です．自転車を上手に乗れるようになる為に，競輪選手のビデオを徹底研究する人がいたとしたら，あなたはどうアドバイスしますか？
そんなものをいくら見て研究しても，実際に自転車に乗ってみないと上手にはならないとアドバイスするでしょう．

受験勉強というのは，数学に限らず，自転車を上手に乗ることに似ています．一流の学者の論文を読んだりしてもいけないわけで，実際に自分のまわりにある問題と実際に格闘してもがいて苦しんではじめて問題が上手に解けるようになるのですね．
ただ，受験勉強の場合は，自転車における補助輪に相当する，参考書や予備校，そして「スタディサプリ」など，これから実力をつけようと考えている受験生にとっての踏み台になるものが沢山あります．
それらを上手に利用して，最後は自分の力で時間の許す限り多くの問題を経験して，制限時間内でちゃんとした解答を書けるようになるまで徹底的に練習することによって，合格がより確実なものになるわけです．

以上のことを意識しながら授業を受けて，自分の及ばない所を少しでもなおしていけば，必ず数学はできるようになるはずです．

最後まで諦めずに頑張りましょう !!

堺　義明

高３　トップレベル数学Ⅲ

目　次

第１講　1の n 乗根 ―― p.4
第２講　点を回転する ―― p.8
第３講　複素数と円 ―― p.12
第４講　複素数と領域 ―― p.16
第５講　媒介変数で表された曲線 ―― p.20
第６講　２次曲線と極座標 ―― p.24
第７講　よくある極限 ―― p.28
第８講　挟んで極限 ―― p.32
第９講　ちょっと難あり極限 ―― p.36
第10講　一般項を求めないで極限 ―― p.40
第11講　無限級数 ―― p.44
第12講　微分について ―― p.48
第13講　接線といえば ―― p.52
第14講　グラフを描く ―― p.56
第15講　ちょっと訳あり増減 ―― p.60
第16講　微分でやっておきたいこと ―― p.64
第17講　落とせない積分計算 ―― p.68
第18講　積分と漸化式 ―― p.72
第19講　実数解条件と体積 ―― p.76
第20講　斜回転体の体積 ―― p.80
第21講　体積は切る！ ―― p.84
第22講　微分方程式 ―― p.88
第23講　積分でやっておきたいこと（その１） ―― p.92
第24講　積分でやっておきたいこと（その２） ―― p.96

第1講　1の n 乗根

1

［A］　複素数 z を

$$z=\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}$$

とおく．次の問いに答えよ．

(1)　$z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6$ の値を求めよ．

(2)　複素数平面において，1，z，z^2，z^3，z^4，z^5，z^6 が表す点を，それぞれ，P_0，P_1，P_2，P_3，P_4，P_5，P_6 とする．$\triangle\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_4$ の重心を $\mathrm{Q}(\alpha)$，$\triangle\mathrm{P}_3\mathrm{P}_5\mathrm{P}_6$ の重心を $\mathrm{R}(\beta)$ とおくとき，複素数 α，β を求めよ．

(3)　$\triangle\mathrm{P}_0\mathrm{QR}$ の面積を求めよ．

［B］　N を自然数とし，複素数 $z=\cos\theta+i\sin\theta$ は $z^N=1$ を満たすとして，以下の級数和 S_1，S_2，S_3 の値を求めよ．

ただし，ここで i は虚数単位 $(i^2=-1)$ である．

(1)　$S_1=1+z+z^2+\cdots+z^{N-1}$

(2)　$S_2=1+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos(N-1)\theta$

(3)　$S_3=1+\cos^2\theta+\cos^2 2\theta+\cdots+\cos^2(N-1)\theta$

＜ Note ＞

第1講　1の n 乗根

1　1の5乗根を z_0，z_1，z_2，z_3，z_4 とする．ただし，

$$0 \leqq \arg z_0 < \arg z_1 < \arg z_2 < \arg z_3 < \arg z_4 < 2\pi$$

次の各問いに答えよ．

(1)　z_0，z_1，z_2，z_3，z_4 の偏角は，$\boxed{}\times k$，$k=0$，1，2，3，4 と表せる．

(2)　$f(z)=(z-z_0)(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)$ とする．$f(2)$ の値は $\boxed{}$

(3)　$g(z)=(z-z_k)(z-{z_k}^2)(z-{z_k}^3)(z-{z_k}^4)$ とする．$z_k \neq z_0$ のとき，$g(2)$ の値は $\boxed{}$

(4)　$z_k \neq z_0$ のとき，$\dfrac{1}{2-z_k}+\dfrac{1}{2-{z_k}^2}+\dfrac{1}{2-{z_k}^3}+\dfrac{1}{2-{z_k}^4}$ の値は $\boxed{}$

＜ Note ＞

第2講　点を回転する

2

［A］　複素数平面上で，△ABC の頂点を表す複素数を α，β，γ とする．α，β，γ が次の3条件を満たすとする．

1．△ABC は辺の長さ $\sqrt{3}$ の正三角形である

2．$\alpha+\beta+\gamma=3$

3．$\alpha\beta\gamma$ の絶対値は1で，虚数部分は正

このとき，次の問いに答えよ．

(1)　$z=\alpha-1$ とおいて，β と γ を z を使って表せ．

(2)　α，β，γ の偏角を求めよ．ただし，$0^\circ \leqq \arg\alpha \leqq \arg\beta \leqq \arg\gamma < 360^\circ$ とする．

［B］　平面上において，直線 l と，l 上にない点 A をとる．直線 l 上に点 B を線分 AB と直線 l が直交するようにとり，点 B を中心として直線 l を角度 θ だけ回転して得られる直線を m とする．直線 l 上にない点 P をとり，直線 l に関して P と対称な点 Q をとる．また点 A を中心として点 Q を角度 2θ だけ回転して得られる点を R とする．このとき線分 PR の中点 M は直線 m 上にあることを証明せよ．

＜ Note ＞

第2講　点を回転する

2　複素数平面上に四角形 ABCD があり，頂点 A，B，C，D は反時計回りに順に並んでいるものとし，4 点 A，B，C，D を表す複素数をそれぞれ z_1，z_2，z_3，z_4 とする．各辺を 1 辺とする 4 つの正方形 BAPQ，CBRS，DCTU，ADVW を四角形 ABCD の外側に作り，正方形 BAPQ，CBRS，DCTU，ADVW の中心をそれぞれ K，L，M，N とおく．

(1)　点 K を表す複素数 w_1 を z_1 と z_2 で表せ．

(2)　KM＝LN，KM⊥LN を証明せよ．

(3)　線分 KM と線分 LN の中点が一致するのは四角形 ABCD がどのような図形のときか．

< Note >

第３講　複素数と円

3

［A］　複素数平面上の原点以外の相異なる２点 P(α)，Q(β) を考える．P(α)，Q(β) を通る直線を l，原点から l に引いた垂線と l の交点を R(w) とする．ただし，複素数 γ が表す点 C を C(γ) とかく．このとき，

「$w=\alpha\beta$ であるための必要十分条件は，P(α)，Q(β) が中心 A$\left(\dfrac{1}{2}\right)$，半径 $\dfrac{1}{2}$ の円周上にあることである．」

を示せ．

［B］　複素数平面上の点 a_1，a_2，…，a_n，… を

$$\begin{cases} a_1=1,\ a_2=i, \\ a_{n+2}=a_{n+1}+a_n\ \ (n=1,\ 2,\ \cdots) \end{cases}$$

により定め，$b_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ とおく．ただし，i は虚数単位である．

(1)　３点 b_1，b_2，b_3 を通る円 C の中心と半径を求めよ．

(2)　すべての点 b_n $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ は円 C の周上にあることを示せ．

＜ Note ＞

第３講　複素数と円

3　a，b を $|a| \neq |b|$，$a \neq 0$ を満たす実数定数とし，複素数 z に対して

$$w=\frac{(a+b)(z+1)}{az+b}$$

とする．

(1)　z が単位円上の点であるとき，w は点 $\alpha=1$ を中心とする半径１の円周上の点であることを示せ．

(2)　z が単位円の内部の点であるとき，w が $\alpha=1$ を中心とする半径１の円の外部の点であるための a，b の条件を求めよ．

< Note >

第4講　複素数と領域

4

［A］　複素数 $z=x+yi$ （x，y は実数）に対して，複素数 w を，$w=\dfrac{z}{z+1}$ で定める．以下の3つの各場合について，w のとりうる値の範囲を複素数平面上に図示せよ．

(1)　$y>0$

(2)　$x^2+y^2>1$ かつ $y>0$

(3)　$|x|<\dfrac{1}{2}$ かつ $y>0$

［B］　α，β，γ は互いに相異なる複素数とする．

(1)　複素数平面上で $\dfrac{z-\beta}{z-\alpha}$ の虚数部分が正となる z の存在する範囲を図示せよ．

(2)　複素数 z が $(z-\alpha)(z-\beta)+(z-\beta)(z-\gamma)+(z-\gamma)(z-\alpha)=0$ を満たしているとき，z は α，β，γ を頂点とする三角形の内部に存在することを示せ．ただし α，β，γ は同一直線上にはないものとする．

＜ Note ＞

第4講　複素数と領域

4　0でない複素数 z に対し，$w=z^2-\dfrac{1}{z^2}$ とおく．このとき，w の実部が正になるような z の範囲を複素数平面上に図示せよ．

＜ Note ＞

第５講　媒介変数で表された曲線

5

［A］　原点を中心として回転する半直線 L と L に接しながら動く半径１の円 C がある．時刻 $t=0$ では，半直線 L は y 軸の負の部分に一致しており，円 C は中心が $(1,\ 0)$ にあって原点で L に接しているとする．時刻 t では，半直線 L は原点を中心に正の向きに t だけ回転し，C は L 上を滑らずにころがって原点から $2t$ の距離の点 R で L に接しているとする．円の中心を P とする．点 Q は C の周上の定点で $t=0$ では原点にあるとする．

(1)　時刻 t での P と Q の座標を媒介変数 t で表せ．

(2)　t が 0 から $\dfrac{\pi}{2}$ まで動くときの P の軌跡を K_1 とし，Q の軌跡を K_2 とする．$(0,\ 0)$ と $(1,\ 0)$ を結ぶ線分，$(\pi,\ 1)$ と $(\pi,\ 2)$ を結ぶ線分および K_1 と K_2 で囲まれる部分の面積を求めよ．

［B］　関数 $f(\theta)=\sqrt{2}\sin^2\theta+\cos\theta$ に対し，次の条件を満たす正の数 a を考える．

$$\begin{cases} |\theta|<a \text{ ならば } f(\theta)>0 \\ |\theta|=a \text{ ならば } f(\theta)=0 \end{cases}$$

(1)　a の値を求めよ．

(2)　曲線 C を媒介変数 $\theta\ (-a\leqq\theta\leqq a)$ を用いて

$$C:\begin{cases} x=f(\theta) \\ y=\sin\theta \end{cases}$$

で定める．x 軸に平行な直線 $y=t$ と曲線 C が共有点をもつような実数 t の値の範囲を求め，共有点の x 座標を t で表せ．

(3)　曲線 C と y 軸とで囲まれる図形を，y 軸のまわりに１回転してできる立体の体積を求めよ．

< Note >

第５講　媒介変数で表された曲線

5　座標平面上に原点Ｏを中心とする半径２の円 C_1 がある．半径１の円 C_2 が C_1 に外接しながら滑ることなく転がるとき，C_2 上の定点Ｐが描く曲線について考える．C_2 の中心をＱとし，Ｑが点 $(3,\ 0)$ にあるとき，Ｐは点 $(4,\ 0)$ にあるとする．このとき，x 軸の正の方向から線分ＯＱへ測った角を θ として，以下の問いに答えよ．

(1)　Ｑを始点として x 軸の正の方向に平行で同じ向きの半直線から線分ＱＰへ測った角は 3θ であることを示せ．

(2)　点Ｐの座標 $(x,\ y)$ を θ で表せ．

(3)　$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ において y の最大値を求めよ．

(4)　θ が $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ の範囲を動くとき，点Ｐの描く曲線の長さを求めよ．

＜ Note ＞

第6講　2次曲線と極座標

6

［A］ 媒介変数 θ を用いて表される曲線

$$C：x=\sin\theta,\quad y=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\quad (0\leqq\theta\leqq 2\pi)$$

がある.

(1) x と y の間の関係式を求めよ.

(2) 曲線 C の概形をかけ.

(3) 曲線 C の囲む図形を y 軸のまわりに1回転してできる立体の体積を求めよ.

［B］ 点Pの極座標 $(r,\ \theta)$ が次の極方程式を満たす.

$$r=2\cos\theta+2\sin\theta$$

ここで, 極方程式においては, r が負である極座標の点も考える. すなわち, $r>0$ のとき, 極座標 $(-r,\ \theta)$ は $(r,\ \theta+\pi)$ と同じ点を表すものとする. 次の問いに答えよ.

(1) θ が $\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲を動くとき, 点Pの軌跡を求め図示せよ.

(2) θ が $\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲を動くとき, $|r|$ の最小値 r_1 とそれを与える θ_1, および $|r|$ の最大値 r_2 とそれを与える θ_2 を求めよ.

(3) θ が $\dfrac{3}{4}\pi\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲を動くとき, Pが描く図形の長さを求めよ.

＜ Note ＞

第6講　2次曲線と極座標

6　極方程式

$$r=\frac{b}{1-a\cos\theta}\quad (b\neq 0,\ 0<a<1)$$

で与えられる曲線と，媒介変数表示された曲線

$$\begin{cases} x=\dfrac{4}{3}\cos t \\ y=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\sin t \end{cases}$$

を x 軸方向へ $\dfrac{2}{3}$ だけ平行移動した曲線が一致するように a，b の値を求めよ．

＜ Note ＞

第７講　よくある極限

7

［A］ 次の極限を求めよ．ただし，必要であれば $x>0$ のとき $e^x>x$ が成り立つことを用いてよい．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}$ （n は自然数）

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{\sqrt{x}}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2^x}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to+0}x\log x$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{x}+\log x\right)$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to+0}x^{\sin x}$

［B］ 次の極限を求めよ．

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}$$

< Note >

第７講　よくある極限

7　次の極限を求めよ．ただし，必要であれば $x>0$ のとき $e^x>x$ が成り立つことを用いてよい．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x}}{e^x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to+0}x^{\frac{x}{2}}$

< Note >

第８講　挟んで極限

8

［A］ n が自然数とする．３次方程式

$$(*)\quad 2x^3+3nx^2-3(n+1)=0$$

について次の問いに答えよ．

(1) 自然数 n の値にかかわらず方程式 (∗) は正の解をただ１つだけもつことを証明せよ．

(2) 方程式 (∗) の正の解を a_n とする．このとき，極限値 $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

［B］ a は $0<a<\pi$ を満たす定数とする．$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ に対し，$n\pi<x<(n+1)\pi$ の範囲に $\sin(x+a)=x\sin x$ を満たす x がただ１つ存在するので，この x の値を x_n とする．

(1) 極限値 $\lim_{n\to\infty}(x_n-n\pi)$ を求めよ．

(2) 極限値 $\lim_{n\to\infty} n(x_n-n\pi)$ を求めよ．

＜ Note ＞

第８講　挟んで極限

8　関数 $f(x)$ を $f(x)=x\sin x-\cos x$ で定める．また，n を自然数とする．

(1)　$2n\pi \leqq x \leqq 2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ の範囲において，$f(x)=0$ となる x がただ１つ存在することを示せ.

(2)　(1)での $f(x)=0$ となる x の値を a_n とする $\left(2n\pi \leqq a_n \leqq 2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$．このとき，$\lim_{n\to\infty}(a_n-2n\pi)=0$ を示せ.

＜ Note ＞

第９講　ちょっと難あり極限

9

［A］　曲線 C：$y=e^x$ と直線 l：$y=ax+b$ $(a>0)$ が２点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ と $\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ で交わっている．ただし，$x_2-x_1=c(>0)$ で $\mathrm{PQ}=1$ であるとき，

$$\lim_{a\to\infty}\frac{{y_2}^2-{y_1}^2}{a}$$

を求めよ．

［B］　$P_m=\dfrac{(3m)!}{3^{3m}(m!)^3}$ に対して $\lim\limits_{m\to\infty}P_m$ を求めよ．

＜ Note ＞

第9講　ちょっと難あり極限

9　${}_n\mathrm{C}_k$ を二項係数とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{5^n}$ を求めよ．

< Note >

第 10 講　一般項を求めないで極限

10

［A］ $f(x)=\dfrac{5}{x^2+4}$ として，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1=2, \qquad a_{n+1}=f(a_n)$$

で定義する．このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ．

［B］ x の関数 $f(x)$ が $0\leqq x\leqq 1$ において連続で $0<f(0)<1$，$f(1)=0$ を満たすとする．また，$f(x)$ は $0<x<1$ において微分可能であり，この区間で $f'(x)<0$ かつ $|f'(x)|\leqq\dfrac{1}{2}$ を満たすとする．

このとき $0<a_1<1$，$a_{n+1}=f(a_n)$ を満たす数列 $\{a_n\}$ に対し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ．

< Note >

第10講　一般項を求めないで極限

10　$a_{n+1}=\frac{1}{5}\left(a_n+\frac{4}{a_n}\right)$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ および $a_1=\frac{4}{5}$ を満たす数列 $\{a_n\}$ において，次の問いに答えよ．

(1)　すべての自然数 n に対して $a_n \geqq \frac{4}{5}$ が成り立つことを示せ．

(2)　極限値 $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

＜ Note ＞

第11講　無限級数

11

［A］　次の無限級数の収束・発散を調べよ．

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}+\cdots\cdots$$

［B］　正数からなる数列 $\{a_n\}$ が，条件 $\sum_{k=1}^{n}(a_k)^2=n^2+2n$ を満たしているとする．このとき，数列 $\left\{\frac{a_1+\cdots+a_n}{n^r}\right\}$ が収束する実数 r の範囲を求めよ．また，収束する場合，その極限値を求めよ．

＜ Note ＞

第 11 講　無限級数

11　次の無限級数の収束・発散を調べよ．ただし，必要であれば自然数 n に対して $\displaystyle\int_1^n \frac{1}{\sqrt{x}}dx=2(\sqrt{n}-1)$ が成り立つことを用いてよい．

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\cdots\cdots$$

< Note >

第12講　微分について

12

［A］　関数 $f(x)$，$g(x)$ はいずれも $x\geqq 0$ において連続で，かつ $g(x)>0$ であるとする．さらに $x\geqq 0$ において関数 $H(x)$，$G(x)$ を

$$H(x)=\int_0^x f(t)g(t)dt$$

$$G(x)=\int_0^x g(t)dt$$

と定義する．次の各問いに答えよ．

(1)　$b>0$ が与えられたとき，$x\geqq 0$ において関数 $P(x)$ を

$$P(x)=G(b)H(x)-H(b)G(x)$$

と定義すると

$$P'(c)=0$$

$$0<c<b$$

となる実数 c が存在することを示せ．

(2)　$b>0$ ならば，$\dfrac{H(b)}{G(b)}=f(c)$，$0<c<b$ となる実数 c が存在することを示せ．

(3)　関数 $f(x)$ が $x>0$ において単調増加なら，関数 $\dfrac{H(x)}{G(x)}$ も $x>0$ で単調増加であることを示せ．

［B］　連続な導関数をもつ関数 $f(x)$ と $g(x)$ について，それぞれ以下の問いに答えよ．

(1)　任意の実数 x に対して $f(x)$ は $f(2x)=2f(x)$ を満たすとする．

(ア)　$f'(x)=f'(0)$ を示せ．

(イ)　$f'(0)=3$ として $f(x)$ を求めよ．

(2)　任意の実数 x に対して $g(x)$ は $g(2x)=\{g(x)\}^2$ を満たすとする．

(ア)　$g(0)$ を求めよ．

(イ)　$g(x)$ を求めよ．ただし，$g(0)\neq 0$ とし，$g'(0)=2$ とする．

< Note >

第12講　微分について

12　関数 $y=f(x)$ は連続とする．

(1)　a を実数の定数とする．すべての実数 x に対して不等式 $|f(x)-f(a)| \leqq \dfrac{2}{3}|x-a|$ が成り立つなら，曲線 $y=f(x)$ は直線 $y=x$ と必ず交わることを中間値の定理を用いて証明せよ．

(2)　さらに，すべての実数 x_1，x_2 に対して $|f(x_1)-f(x_2)| \leqq \dfrac{2}{3}|x_1-x_2|$ が成り立つならば，(1)の交点はただ1つしかないことを証明せよ．

< Note >

第13講　接線といえば

13

［A］　正の数 c の k 乗根 $\sqrt[k]{c}$（k は2以上の整数）の近似値を求めるため $f(x)=x^k-c$，

$g(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$ $(x>0)$ とおき，$\sqrt[k]{c}<a_1$，$a_{n+1}=g(a_n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とする．

(1)　$\sqrt[k]{c}<a_n$ ならば，$\sqrt[k]{c}<a_{n+1}<a_n$ を示せ．

(2)　$k=3$ のとき，$\sqrt[3]{c}<a_n$ ならば，$a_{n+1}-\sqrt[3]{c}<\dfrac{1}{\sqrt[3]{c}}(a_n-\sqrt[3]{c})^2$ を示せ．

(3)　$k=3$，$c=2$，$a_1=1.3$ のとき，$a_5-\sqrt[3]{2}<\dfrac{1}{2^5\cdot 10^{16}}$ を示せ．

［B］　$e^{\pi}>22$ を示せ．

< Note >

第13講　接線といえば

13　$\sin 1 < 0.85$ を示せ.

＜ Note ＞

第14講　グラフを描く

14

［A］　次のグラフを描け.

（1）　$y=\dfrac{\log(x+1)}{x}$

（2）　$y=x^2-2^x$

［B］　$(x,\ y)=(\cos 2t,\ t\sin t)$　$(0\leqq t\leqq 2\pi)$ で定められる曲線を描け.

＜ Note ＞

第14講　グラフを描く

14　次のグラフを描け.

(1)　$y=x\log x-(x-1)\log(x+1)$

(2)　$(x,\ y)=(e^{-t}\cos t,\ e^{-t}\sin t)\quad (0\leqq t\leqq \pi)$

< Note >

第15講　ちょっと訳あり増減

15

［A］ 座標平面上の曲線 $x=\cos^3\theta$，$y=\sin^3\theta$ $\left(0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{4}\right)$ において，この曲線上の点 $(\cos^3\theta,\ \sin^3\theta)$ における法線（接線と接点で直交する直線）と x 軸との交点をP，この法線と直線 $y=x$ との交点をQとする．原点と点P，点Qで作られる三角形OPQの面積を $S(\theta)$ とする．$S(\theta)$ は $0<\theta<\dfrac{\pi}{6}$ で最大値をとる関数であることを示せ.

［B］ 平面上に二つの曲線

$$C：y=e^{2x}+1,$$
$$D：y=-x^2+14x-49$$

がある.

(1) C 上の点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における C の接線と D 上の点 $\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ における D の接線が平行であるとき，x_2 を x_1 で表せ.

(2) D 上の点Qを固定し，C 上の点Pを動かすときに，線分PQの長さは点 P_0 で最小になるとする．このとき C の P_0 での接線は，線分 $\mathrm{P}_0\mathrm{Q}$ と直交することを証明せよ.

(3) 点P，Qがそれぞれ C 上と D 上を動くとき，線分PQの長さの最小値を求めよ.

< Note >

第 15 講　ちょっと訳あり増減

15　AB を直径とする半径 1 の半円がある．P を半円周上の動点とし，$\angle \mathrm{PAB}=\theta$ とおくとき，P は $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす範囲を動く．直径 AB と弦 AP と $\overset{\frown}{\mathrm{PB}}$ で囲まれた部分の面積を $T(\theta)$ で表す．

(1)　$T(\theta)$ を求めよ．

(2)　P が半円周上を $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ の範囲で動くとき，線分 AP を折り目にしてこの半円を折り重ね，重なった部分の面積を $S(\theta)$ とおく．このとき $S(\theta)$ を $T(\theta)$ と $T(2\theta)$ を用いて表せ．

(3)　(2)の $S(\theta)$ の最大値を与える θ の値を α とするとき，$\cos 2\alpha$ の値を求めよ．

< Note >

第 16 講　微分でやっておきたいこと

16

［A］　以下において，$f(x)$ はすべての実数 x において微分可能な関数とし，
$F(x)=e^x f(x)$ とおく．

(1)　定数関数でない関数 $f(x)$ で条件(A)「すべての x に対して $f(x+1)=f(x)$ である」を満たすものの例をあげよ．

(2)　関数 $f(x)$ が条件(B)「すべての x に対して $f'(x)+f(x)\leqq 0$ である」を満たすとき，$a<b$ ならば $F(a)\geqq F(b)$ であることを示せ．

(3)　関数 $f(x)$ が(1)の条件(A)を満たすとき，$F(x+n)$（ただし，n は正の整数）を $F(x)$ を用いて表せ．

(4)　関数 $f(x)$ が(1)，(2)の条件(A)，(B)をともに満たすとする．

1．$f(c)\geqq 0$ となる c が存在すれば，$f(c)=0$ であることを示せ．

2．ある c で $f(c)=0$ であれば，すべての x で $f(x)=0$ であることを示せ．

［B］　$x>0$ において関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\frac{x^2+1}{2}\log\frac{x^2+1}{2}+\frac{1}{2}(x-1)^2-x^2\log x$$

で定める．対数は自然対数である．

(1)　導関数 $f'(x)$ が単調増加であることを示せ．

(2)　$f(x)\geqq 0$ であることを示し，$f(x)=0$ となる x を求めよ．

(3)　正の実数 p，q について不等式

$$\frac{p^2+q^2}{2}\log\frac{p^2+q^2}{2}\geqq -\frac{1}{2}(p-q)^2+\frac{p^2\log p^2+q^2\log q^2}{2}$$

が成立することを示せ．

＜ Note ＞

第 16 講　微分でやっておきたいこと

16　m を正の定数とし，$x \geqq 0$ で定義された連続関数 $S(x)$ が常に正の値をとるとき，$x \geqq 0$ において関数 $u(x)$，$v(x)$，$f(x)$，$g(x)$ を

$$u(x)=\int_0^x S(t)dt+m,\ v(x)=\int_0^x tS(t)dt+m,\ f(x)=\frac{v(x)}{u(x)},\ g(x)=v(x)-xu(x)$$

とおく．

(1)　$g(0)>0$，$g(1)<0$ および $x>0$ において $g'(x)<0$ を示せ．

(2)　$f(x)=x$ を満たす x の値がただ１つ存在することを示せ．

(3)　$f(x)=x$ を満たす x の値を a とするとき，$f(x)$ の最小値を求めよ．

< Note >

第17講　落とせない積分計算

17

［A］ 次の定積分を計算せよ．ただし，m，n は正の整数である．

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^5 x\, dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^4 x\, dx$

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos^3 x}\, dx$

(4) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin mx \sin nx\, dx$

［B］ 次の定積分を計算せよ．

$$\int_0^1 \frac{1}{x^6+1}\, dx$$

＜ Note ＞

第 17 講　落とせない積分計算

17　次の定積分を計算せよ.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta}{\sin^3\theta+1}d\theta$$

< Note >

第18講　積分と漸化式

18

［A］ 次の定積分を計算せよ．ただし，α と β は $\alpha<\beta$ を満たす定数，m と n は自然数とする．

$$I(m,\ n)=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^m(x-\beta)^n dx$$

［B］ $n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ に対して

$$S_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x x^n \sin x\,dx$$

$$C_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x x^n \cos x\,dx$$

とおく．ただし，e は自然対数の底である．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) S_0，C_0 の値をそれぞれ求めよ．

(2) $n\geqq 1$ のとき，S_n を S_{n-1}，C_{n-1} を用いて，また，C_n を S_{n-1}，C_{n-1} を用いてそれぞれ表せ．

(3) $f(x)=\int_0^x t(\sin t-\cos t)dt+\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^t f(t)dt$ を満たす $f(x)$ を求めよ．

＜ Note ＞

第18講　積分と漸化式

18　次の問いに答えよ．

(1)　p，q を0または正の整数とし

$$I_{p,\,q}=\int_0^1 t^p(1-t)^q dt$$

とおく．

(a)　$I_{p,\,0}$ の値を求めよ．

(b)　$q\geqq 1$ のとき，次の漸化式が成り立つことを証明せよ．

$$I_{p,\,q}=\frac{q}{p+1}I_{p+1,\,q-1}$$

(c)　次の等式を証明せよ．

$$I_{p,\,q}=\frac{p!q!}{(p+q+1)!}$$

(2)　n を正の整数とすると

$$\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\frac{p!(n-p)!}{(n+1)!}=\frac{1}{n+2}\{1+(-1)^n\}$$

が成り立つことを証明せよ．

＜ Note ＞

第19講　実数解条件と体積

19

［A］ a を $0<a<\frac{1}{4}$ を満たす実数とする．xy 平面で，不等式

$$y^2 \leqq x^2(1-x^2)-a$$

の表す領域を y 軸のまわりに1回転してできる回転体の体積を求めよ．

［B］ 座標空間において，平面 $z=\sqrt{2}$ 上にある半径 $\sqrt{2}$，中心 $(0,\ 0,\ \sqrt{2})$ の円を C_1，平面 $z=-\sqrt{2}$ 上にある半径 $\sqrt{2}$，中心 $(0,\ 0,\ -\sqrt{2})$ の円を C_2 とする．また，空間内の点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ に対し，円 C_1 上を動く点Qと P の距離の最小値を m，円 C_2 上を動く点 R と P の距離の最大値を M とする．次の問いに答えよ．

(1) $r=\sqrt{x^2+y^2}$ とおくとき，m と M を r および z で表せ．

(2) $|M-2\sqrt{6}|\geqq m$ という条件を満たす点 P の範囲を H とする．図形 H の体積を求めよ．

< Note >

第19講　実数解条件と体積

19　$V=\{(x,\ y,\ z)\,|\,(\sqrt{x^2+y^2}-2)^2+z^2\leqq 1\}$ とする.

(1)　V の平面 $z=t$ による切り口の面積 $S(t)$ を求めよ.

(2)　V の体積を求めよ.

＜ Note ＞

第20講　斜回転体の体積

20

［A］ 直線 $l : y = mx$ $(m > 0)$ と曲線 $C : y = x^2$ によって囲まれる部分を D とする．D を l を軸に回転してできる立体の体積 V を求めよ．

［B］ 直線 $l_1 : y = x$ と $l_2 : y = -x + \pi$ と曲線 $C : y = \sin x$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ によって囲まれる部分を D とする．D を l_1 を軸に回転してできる立体の体積 V を求めよ．

< Note >

第 20 講　斜回転体の体積

20　関数 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ のグラフを曲線 C とする．

(1)　曲線 C 上の点 $\mathrm{A}\left(1,\ \dfrac{1}{2}\right)$ における接線 l の方程式を求めよ．

(2)　曲線 C 上の点 $\mathrm{P}\left(t,\ \dfrac{1}{2}t^2\right)$ から l に下ろした垂線の足を H とする．H の座標と線分 PH の長さを t を用いて表せ．

(3)　l と y 軸との交点を Q とし，線分 QH の長さを s とするとき，s を t を用いて表せ．

(4)　曲線 C と直線 l と y 軸で囲まれた部分を，直線 l の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

＜ Note ＞

第21講　体積は切る！

21

［A］ xyz 空間内に2つの立体 K, L がある．どのような a に対しても，平面 $z=a$ による立体 K の切り口は3点 $(0,\ 0,\ a)$，$(1,\ 0,\ a)$，$\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ a\right)$ を頂点とする正三角形である．また，どのような a に対しても，平面 $y=a$ による立体 L の切り口は3点 $(0,\ a,\ 0)$，$\left(0,\ a,\ \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$，$\left(1,\ a,\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ を頂点とする正三角形である．このとき，立体 K と L の共通部分の体積を求めよ．

［B］ 立体 K：$x^2+y^2+z^2\leqq 4$ と立体 L：$(x-1)^2+y^2\leqq 1$ の共通部分の立体の体積 V を求めよ．

< Note >

第21講　体積は切る！

21　xyz 空間に5点 A(1，1，0)，B(−1，1，0)，C(−1，−1，0)，D(1，−1，0)，P(0，0，3) をとる．四角錐 PABCD の

$$x^2+y^2 \geqq 1$$

を満たす部分の体積を求めよ．

＜ Note ＞

第22講　微分方程式

22

［A］ 次の各問いに答えよ．

(1) $y'-xy=x$ を満たす関数を求めよ．ただし $x=0$ のとき $y=0$ であるとする．

(2) $y'+3x^2y=3x^5$ を満たす関数を求めよ．ただし $x=0$ のとき $y=0$ であるとする．

(3) 室温が摂氏 T_0 度の部屋にビーカーがおかれていて，そのビーカーの中にある液体が入っている．時刻 t におけるその液体の温度が摂氏 T 度であり，$t=0$ のとき $T=2T_0$ であった．温度 T の時間変化，つまり $\dfrac{dT}{dt}$ は，液体の温度 T と室温 T_0 との差に比例しているとして，その比例定数を $-k$ としたとき，T を t の式で表せ．ただし，部屋は十分に大きく，室温は常に一定であるものとする．

［B］ 関数 $f(x)$ は微分可能で $f'(x)$ は連続とし，$f(x)$ は関係式

$$f(x)+\int_0^x f(t)dt=\sin x$$

を満たしているとする．次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ と $f'(x)$ との間に成り立つ関係式を求めよ．

(2) $\dfrac{d}{dx}\{e^x f(x)\}$ を指数関数と三角関数で表せ．

(3) $\displaystyle\int_0^x e^t(\sin t+\cos t)dt=\int_0^x e^t(\sin t-\cos t)dt+e^x(\sin x+\cos x)-1$ を示せ．

(4) $\displaystyle\int_0^x e^t\cos t\,dt$ を求めよ．

(5) $f(x)$ を求めよ．

＜ Note ＞

第 22 講　微分方程式

22　$f(x)$ は開区間 $(0,\ 1)$ で定義された関数で，この区間で $f(x)>0$, $f'(x)<0$, $f''(x)\neq 0$ を満たすとする．このとき，曲線 $y=f(x)$ 上の任意の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ における接線が x 軸，y 軸と交わる点をそれぞれ A，B，座標の原点を O とすると，OA＋OB はつねに一定になるという．

(1)　OA＋OB を $F(x)$ とするとき，$F(x)=c$ (c は定数) の両辺を x で微分することにより，微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}=-\sqrt{\dfrac{y}{x}}$ が得られることを示せ．

(2)　(1)の微分方程式の解の中で，$x=\dfrac{1}{4}$ のとき $y=\dfrac{1}{4}$ となるものを求めよ．

< Note >

第23講　積分でやっておきたいこと（その1）

23

［A］　次の問いに答えよ．

(1)　任意の実数 t に対して，t を定数とする次の3次方程式はただ1つの実数解をもつことを示せ．

$$x^3+12x=t$$

以下，この実数解を $f(t)$ と表す．

(2)　関数 $f(t)$ のグラフのおよその様子を描け．

(3)　xy 平面上の動点Pの x 座標，y 座標が時刻 t の関数として $x=f(t)$，$y=\dfrac{1}{4}\{f(t)\}^2$ で与えられているとする．点 $(0,\ 1)$ をFとするとき，時刻 $t\ (t\geqq 0)$ から時刻 $t+h\ (h>0)$ までの間に線分FPの通過する部分の面積を S とする．このとき，

(I)　S を求め，S は t に関係しないことを示せ．

(II)　時刻 t のとき，加速度ベクトルを方向ベクトルとし，点Pを通る直線は定点を通ることを示せ．

［B］　自然数 n に対して，関数 $f_n(x)=x^ne^{1-x}$ と，その定積分 $a_n=\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$ を考える．ただし，e は自然対数の底である．次の問いに答えよ．

(1)　区間 $0\leqq x\leqq 1$ 上で $0\leqq f_n(x)\leqq 1$ であることを示し，さらに $0<a_n<1$ が成り立つことを示せ．

(2)　a_1 を求めよ．$n>1$ に対して a_n と a_{n-1} の間の漸化式を求めよ．

(3)　自然数 n に対して，等式 $\dfrac{a_n}{n!}=e-\left(1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n!}\right)$ が成り立つことを証明せよ．

(4)　いかなる自然数 n に対しても，$n!e$ は整数とならないことを示せ．

＜ Note ＞

第 23 講　積分でやっておきたいこと（その１）

23　曲線 $y=e^x$ の $0\leqq x\leqq 3$ に対応する部分を y 軸のまわりに回転してできる容器がある．これに毎秒 a の割合で上から水を注ぐ．

(1)　この容器に水がいっぱいになるのは何秒後か．

(2)　この水面の上昇速度が毎秒 $\dfrac{a}{4\pi}$ になった瞬間の水深を求めよ．

< Note >

第24講　積分でやっておきたいこと（その2）

24

［A］ 関数 $g(x)$ は次の3つの条件を満たすとする．

(i) $g(0)=0$

(ii) すべての x について，$g(x)=g(1-x)$

(iii) すべての x について，$g''(x)<0$

実数 t が $t>0$ の範囲を動くとき，関数

$$f(t)=\int_0^1 |x^2-tg(x)|dx$$

の最小値を求めよ．

［B］ 次の問いに答えよ．

(1) 以下の等式を示せ．

$$\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)}{\cos x}=\sqrt{3}+\tan x \quad \left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$$

(2) 閉区間 $[0,\ a]$ で連続な関数 $f(x)$ に対して，

$$\int_0^a f(a-x)dx=\int_0^a f(x)dx$$

を示せ．

(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \log(\sqrt{3}+\tan x)dx$ の値を求めよ．

＜ Note ＞

第24講　積分でやっておきたいこと（その2）

24　$f(x)$ が $0 \leqq x \leqq 1$ で連続な関数であるとき

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$$

が成立することを示し，これを用いて定積分

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{3+\sin^2 x}dx$$

を求めよ．

< Note >

テキスト解答

第1講　1の n 乗根

1

［A］　複素数 z を

$$z=\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}$$

とおく．次の問いに答えよ．

(1)　$z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6$ の値を求めよ．

(2)　複素数平面において，1，z，z^2，z^3，z^4，z^5，z^6 が表す点を，それぞれ，P_0，P_1，P_2，P_3，P_4，P_5，P_6 とする．$\triangle P_1P_2P_4$ の重心を $Q(\alpha)$，$\triangle P_3P_5P_6$ の重心を $R(\beta)$ とおくとき，複素数 α，β を求めよ．

(3)　$\triangle P_0QR$ の面積を求めよ．

［B］　N を自然数とし，複素数 $z=\cos\theta+i\sin\theta$ は $z^N=1$ を満たすとして，以下の級数和 S_1，S_2，S_3 の値を求めよ．

ただし，ここで i は虚数単位 $(i^2=-1)$ である．

(1)　$S_1=1+z+z^2+\cdots+z^{N-1}$

(2)　$S_2=1+\cos\theta+\cos2\theta+\cdots+\cos(N-1)\theta$

(3)　$S_3=1+\cos^2\theta+\cos^2 2\theta+\cdots+\cos^2(N-1)\theta$

【答】　［A］　(1) -1　(2) $\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{7}\,i}{6}$，$\beta=\dfrac{-1-\sqrt{7}\,i}{6}$　(3) $\dfrac{7\sqrt{7}}{36}$

［B］　(1) $S_1=\begin{cases}N & (z=1)\\ 0 & (z\neq1)\end{cases}$　(2) $S_2=\begin{cases}N & (z=1)\\ 0 & (z\neq1)\end{cases}$　(3) $S_3=\begin{cases}N & (z=\pm1)\\ \dfrac{N}{2} & (z\neq\pm1)\end{cases}$

【解説】

［A］　(1)　$z^7=\cos2\pi+i\sin2\pi=1$ である．

$$\begin{aligned}&z^7-1=0\\ \iff\ &(z-1)(z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1)=0\\ \iff\ &z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=0\quad(z\neq1\ より)\\ \therefore\ &z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6=\mathbf{-1}\end{aligned}$$

(2)　$\alpha=\dfrac{z+z^2+z^4}{3}$，$\beta=\dfrac{z^3+z^5+z^6}{3}$ であるから，(1)と $z^7=1$ に注意すると

$$\alpha+\beta=\frac{z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z}{3}=-\frac{1}{3}$$

$$\alpha\beta=\frac{3z^7+z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z}{9}=\frac{2}{9}$$

よって　α，β は $t^2+\dfrac{1}{3}t+\dfrac{2}{9}=0$ の2解であり α の虚部は正より

$$\boldsymbol{\alpha=\frac{-1+\sqrt{7}\,i}{6},\quad \beta=\frac{-1-\sqrt{7}\,i}{6}}$$

(3)　$\triangle P_0QR$ は底辺の長さが

$$|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{7}}{3}$$

高さが

$$\left|\frac{\alpha+\beta}{2}-1\right|=\frac{7}{6}$$

とみることができるので，求める面積は

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{3}\cdot\frac{7}{6}=\boldsymbol{\frac{7\sqrt{7}}{36}}$$

［B］(1)　$z=1$ のとき

$$S_1=1+1+1+\cdots+1=N$$

$z\neq1$ のとき

$$S_1=\frac{z^N-1}{z-1}=0$$

ゆえに

$$\boldsymbol{S_1=\begin{cases}N & (z=1)\\ 0 & (z\neq1)\end{cases}}$$

(2)　(1)より

$$S_1=\{1+\cos\theta+\cos2\theta+\cdots+\cos(N-1)\theta\}+i\{\sin\theta+\sin2\theta+\cdots+\sin(N-1)\theta\}$$

よって S_2 は S_1 の実部を表しているので

$$\boldsymbol{S_2=\begin{cases}N & (z=1)\\ 0 & (z\neq1)\end{cases}}$$

(3)

$$\begin{aligned}S_3&=1+\cos^2\theta+\cos^2 2\theta+\cdots+\cos^2(N-1)\theta\\&=1+\frac{1}{2}(1+\cos2\theta)+\frac{1}{2}(1+\cos4\theta)+\cdots+\frac{1}{2}\{1+\cos2(N-1)\theta\}\\&=\frac{N}{2}+\frac{1}{2}\{1+\cos2\theta+\cos4\theta+\cdots+\cos2(N-1)\theta\}\end{aligned}$$

となるが，第2項の中括弧の中身は $z^{2N}=1$ を満たすときの

$$1+z^2+z^4+\cdots+z^{2(N-1)}$$

の実部となるので

$$\begin{aligned}&1+\cos2\theta+\cos4\theta+\cdots+\cos2(N-1)\theta\\&=\begin{cases}N & (z=\pm1)\\ 0 & (z\neq\pm1)\end{cases}\end{aligned}$$

となる．よって

$$\boldsymbol{S_3=\begin{cases}N & (z=\pm1)\\ \dfrac{N}{2} & (z\neq\pm1)\end{cases}}$$

第2講　点を回転する

2

［A］ 複素数平面上で，△ABC の頂点を表す複素数を α，β，γ とする．α，β，γ が次の3条件を満たすとする．

1．△ABC は辺の長さ $\sqrt{3}$ の正三角形である

2．$\alpha+\beta+\gamma=3$

3．$\alpha\beta\gamma$ の絶対値は1で，虚数部分は正

このとき，次の問いに答えよ．

(1) $z=\alpha-1$ とおいて，β と γ を z を使って表せ．

(2) α，β，γ の偏角を求めよ．ただし，$0^\circ \leqq \arg\alpha \leqq \arg\beta \leqq \arg\gamma < 360^\circ$ とする．

［B］ 平面上において，直線 l と，l 上にない点 A をとる．直線 l 上に点 B を線分 AB と直線 l が直交するようにとり，点 B を中心として直線 l を角度 θ だけ回転して得られる直線を m とする．直線 l 上にない点 P をとり，直線 l に関して P と対称な点 Q をとる．また点 A を中心として点 Q を角度 2θ だけ回転して得られる点を R とする．このとき線分 PR の中点 M は直線 m 上にあることを証明せよ．

【答】 ［A］ (1) $\beta=z\left(-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)+1$，$\gamma=z\left(-\dfrac{1}{2}\mp\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)+1$ （複号同順）

(2) $\arg\alpha=20^\circ$，$\arg\beta=80^\circ$，$\arg\gamma=320^\circ$

［B］ 略

【解説】

［A］ (1) 条件2. より $\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3}=1$．よって1は △ABC の重心である．このとき α から β，α から γ は1を中心に $\pm120^\circ$ 回転した点なので，以下すべて複号同順で

$$\begin{cases}\beta-1=(\alpha-1)(\cos(\pm120^\circ)+i\sin(\pm120^\circ))\\ \gamma-1=(\alpha-1)(\cos(\mp120^\circ)+i\sin(\mp120^\circ))\end{cases}$$

$$\therefore\ \begin{cases}\boldsymbol{\beta=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}z+1}\\ \boldsymbol{\gamma=\dfrac{-1\mp\sqrt{3}\,i}{2}z+1}\end{cases}$$

(2) 条件1. より重心から各頂点までの距離は1であるから

$$|z|=1$$

よって

$$z=\cos\theta+i\sin\theta \quad (0^\circ \leqq \theta < 360^\circ)$$

とおける．

(1)より $\beta\gamma=z^2-z+1$ となるので

$$\begin{aligned}\alpha\beta\gamma&=(z+1)(z^2-z+1)\\&=z^3+1\\&=\cos3\theta+1+i\sin3\theta\end{aligned}$$

この複素数の絶対値が１で虚数部分が正より

$$(\cos 3\theta+1)^2+\sin^2 3\theta=1 \text{ かつ } \sin 3\theta>0$$

$$\iff \cos 3\theta=-\frac{1}{2} \text{ かつ } \sin 3\theta>0$$

$$\iff 3\theta=120^\circ,\ 480^\circ,\ 840^\circ$$

$$\therefore\ \theta=40^\circ,\ 160^\circ,\ 280^\circ$$

このとき

$$z+1=1+\cos\theta+i\sin\theta$$

$$=2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

$\theta=40^\circ$ のとき

$$z+1=2\cos 20^\circ(\cos 20^\circ+i\sin 20^\circ)$$

$\theta=160^\circ$ のとき

$$z+1=2\cos 80^\circ(\cos 80^\circ+i\sin 80^\circ)$$

$\theta=280^\circ$ のとき

$$z+1=2\cos 140^\circ(\cos 140^\circ+i\sin 140^\circ)$$

$$=2\cos 40^\circ(\cos 320^\circ+i\sin 320^\circ)$$

上記の結果と対称性より

$$\boldsymbol{\arg\alpha=20^\circ,\ \arg\beta=80^\circ,\ \arg\gamma=320^\circ}$$

［B］ B(0)，A(α)（α は純虚数；$\alpha+\overline{\alpha}=0$ かつ $\alpha\neq 0$）とおいても一般性は失われない．

$\omega=\cos\theta+i\sin\theta$ $(0\leqq\theta<\pi)$ とおくと

$$\omega^2=\cos 2\theta+i\sin 2\theta,$$

$$\overline{\omega}=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)$$

である．P(z) とすると，Q を表す複素数は $\overline{z}$ となるので R を表す複素数は

$$(1-\omega^2)\alpha+\omega^2\overline{z}$$

となる．M は PR の中点より M を表す複素数は

$$\frac{(1-\omega^2)\alpha+\omega^2\overline{z}+z}{2}$$

であり，この点を B(0) を中心に $-\theta$ 回転した点を表す複素数は

$$\frac{(1-\omega^2)\alpha+\omega^2\overline{z}+z}{2}\times\overline{\omega}$$

$$=\frac{1}{2}\{(\overline{\omega}-\omega)\alpha+\omega\overline{z}+\overline{\omega}z\} \quad \cdots\cdots①$$

ここで

$$\begin{aligned}
&\overline{(\overline{\omega}-\omega)\alpha+\omega\overline{z}+\overline{\omega}z}\\
&=(\omega-\overline{\omega})\overline{\alpha}+\overline{\omega}z+\omega\overline{z}\\
&=(\omega-\overline{\omega})(-\alpha)+\overline{\omega}z+\omega\overline{z}\quad(\overline{\alpha}=-\alpha\ \text{より})\\
&=(\overline{\omega}-\omega)\alpha+\omega\overline{z}+\overline{\omega}z
\end{aligned}$$

より①は実数であるので，M が m 上にあることが示された.

第３講　複素数と円

3

［A］　複素数平面上の原点以外の相異なる２点 $P(\alpha)$，$Q(\beta)$ を考える．$P(\alpha)$，$Q(\beta)$ を通る直線を l，原点から l に引いた垂線と l の交点を $R(w)$ とする．ただし，複素数 γ が表す点 C を $C(\gamma)$ とかく．このとき，

「$w=\alpha\beta$ であるための必要十分条件は，$P(\alpha)$，$Q(\beta)$ が中心 $A\left(\frac{1}{2}\right)$，半径 $\frac{1}{2}$ の円周上にあることである．」

を示せ．

［B］　複素数平面上の点 a_1，a_2，…，a_n，… を

$$\begin{cases} a_1=1,\ a_2=i, \\ a_{n+2}=a_{n+1}+a_n\ (n=1,\ 2,\ \cdots) \end{cases}$$

により定め，$b_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ とおく．ただし，i は虚数単位である．

(1)　３点 b_1，b_2，b_3 を通る円 C の中心と半径を求めよ．

(2)　すべての点 b_n $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ は円 C の周上にあることを示せ．

【答】［A］　略

［B］ (1) 中心 $\frac{1}{2}$，半径 $\frac{\sqrt{5}}{2}$　(2) 略

【解説】

［A］　題意より $w(w-\alpha)\neq 0$ のとき $OR\perp RP$ より

$$\alpha-w=\frac{|\alpha-w|}{|w|}(\mp i)\cdot(0-w)$$

$$\Longleftrightarrow\quad |w|(\alpha-w)=\pm|\alpha-w|wi\quad\cdots\cdots①$$

が成り立つ．これは $w(w-\alpha)=0$ のときにも成立する．

同様に

$$|w|(\beta-w)=\pm|\beta-w|wi\quad\cdots\cdots②$$

も成り立つ．

(I)　$w=\alpha\beta$ のとき

$$\begin{aligned} ①\quad&\Longleftrightarrow\quad |\alpha\beta|(\alpha-\alpha\beta)=\pm|\alpha-\alpha\beta|\alpha\beta i \\ &\Longleftrightarrow\quad |\alpha||\beta|\alpha(1-\beta)=\pm|\alpha||1-\beta|\alpha\beta i \\ &\Longleftrightarrow\quad |\beta|(1-\beta)=\pm|1-\beta|\beta i\quad\cdots\cdots③ \end{aligned}$$

$\beta\neq 0$ より

$$③\quad\Longleftrightarrow\quad 1-\beta=\frac{|1-\beta|}{|\beta|}(\mp i)(0-\beta)$$

となるので $O(0)$，$B(1)$ とおくと

$$OQ\perp BQ$$

であることがわかる．よって Q は OB を直径とする円周上の点．よって $\beta=1$ の場合と

あわせても Q は中心 A$\left(\dfrac{1}{2}\right)$，半径 $\dfrac{1}{2}$ の円周上の点である．同様に

$$② \iff |\alpha|(1-\alpha)=\pm|1-\alpha|\alpha i$$

より P も中心 A$\left(\dfrac{1}{2}\right)$，半径 $\dfrac{1}{2}$ の円周上の点である．

(Ⅱ)　α，β が中心 A$\left(\dfrac{1}{2}\right)$，半径 $\dfrac{1}{2}$ の円周上の点のとき，$\alpha\neq 0$ より

$$\alpha=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(\cos\theta+i\sin\theta)\ (-\pi<\theta<\pi)$$

と表せるが

$$\begin{aligned}\alpha&=\frac{1}{2}(1+\cos\theta)+\left(\frac{1}{2}\sin\theta\right)i\\&=\cos^2\frac{\theta}{2}+\left(\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)i\\&=\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)\end{aligned}$$

より $\phi\neq\theta$，$-\pi<\phi<\pi$ なる ϕ を用いて

$$\beta=\cos\frac{\phi}{2}\left(\cos\frac{\phi}{2}+i\sin\frac{\phi}{2}\right)$$

と表せる．ここで $\alpha\beta\neq 0$ より

$$\begin{aligned}\frac{\alpha-\alpha\beta}{0-\alpha\beta}&=-\frac{1}{\beta}+1\\&=-\frac{1}{\cos\frac{\phi}{2}}\left\{\cos\left(-\frac{\phi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\phi}{2}\right)\right\}+1\\&=\left(\tan\frac{\phi}{2}\right)i\end{aligned}$$

より 0 と $\alpha\beta$，$\alpha\beta$ と α を結ぶ線分は直角である．同様に

$$\beta-\alpha\beta=\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)i\cdot(-\alpha\beta)$$

が得られるが

$$\alpha-\alpha\beta=\left(\tan\frac{\phi}{2}\right)i\cdot(-\alpha\beta)$$

より

$$\beta-\alpha\beta=k(\alpha-\alpha\beta)\ (k \text{ は実数})$$

と表せるので，α，β，$\alpha\beta$ は同一直線上に存在する．よって $w=\alpha\beta$ である．

［B］ (1) $a_1=1$, $a_2=i$, $a_3=1+i$, $a_4=1+2i$ より

$$b_1=i,\ b_2=1-i,\ b_3=\frac{3+i}{2}$$

ここで

$$\frac{b_2-b_3}{b_1-b_3}=\frac{(1-i)-\dfrac{3+i}{2}}{i-\dfrac{3+i}{2}}=\frac{-1-3i}{-3+i}=i$$

であるから $b_1b_2b_3$ は $\angle b_1b_3b_2=\dfrac{\pi}{2}$ の直角二等辺三角形.

よって中心 $\dfrac{b_1+b_2}{2}=\mathbf{\dfrac{1}{2}}$，半径 $=\dfrac{|b_1-b_2|}{2}=\mathbf{\dfrac{\sqrt{5}}{2}}$

(2)
$$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n \iff \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=1+\frac{a_n}{a_{n+1}}$$

$$\therefore\ b_{n+1}=1+\frac{1}{b_n} \iff b_n=\frac{1}{b_{n+1}-1}$$

ここで(1)より $n\geqq 3$ について

$$\left|b_n-\frac{1}{2}\right|=\frac{\sqrt{5}}{2}\quad\cdots\cdots①$$

が成り立つと仮定すると

$$\begin{aligned}
① &\iff \left|\frac{1}{b_{n+1}-1}-\frac{1}{2}\right|=\frac{\sqrt{5}}{2}\\
&\iff |3-b_{n+1}|=\sqrt{5}\,|b_{n+1}-1|\\
&\iff 9-3b_{n+1}-3\overline{b_{n+1}}+b_{n+1}\overline{b_{n+1}}\\
&\qquad\qquad =5(b_{n+1}\overline{b_{n+1}}-b_{n+1}-\overline{b_{n+1}}+1)\\
&\iff b_{n+1}\overline{b_{n+1}}-\frac{1}{2}b_{n+1}-\frac{1}{2}\overline{b_{n+1}}-1=0\\
&\iff \left(b_{n+1}-\frac{1}{2}\right)\overline{\left(b_{n+1}-\frac{1}{2}\right)}=\frac{5}{4}\\
&\iff \left|b_{n+1}-\frac{1}{2}\right|^2=\frac{5}{4}\\
&\therefore\ \left|b_{n+1}-\frac{1}{2}\right|=\frac{\sqrt{5}}{2}
\end{aligned}$$

よって帰納的に題意は示された.

第４講　複素数と領域

4

［A］　複素数 $z=x+yi$ $(x,\ y$ は実数$)$ に対して，複素数 w を，$w=\dfrac{z}{z+1}$ で定める．以下の３つの各場合について，w のとりうる値の範囲を複素数平面上に図示せよ．

(1)　$y>0$

(2)　$x^2+y^2>1$ かつ $y>0$

(3)　$|x|<\dfrac{1}{2}$ かつ $y>0$

［B］　$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ は互いに相異なる複素数とする．

(1)　複素数平面上で $\dfrac{z-\beta}{z-\alpha}$ の虚数部分が正となる z の存在する範囲を図示せよ．

(2)　複素数 z が $(z-\alpha)(z-\beta)+(z-\beta)(z-\gamma)+(z-\gamma)(z-\alpha)=0$ を満たしているとき，z は $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ を頂点とする三角形の内部に存在することを示せ．ただし $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ は同一直線上にはないものとする．

【答】　略

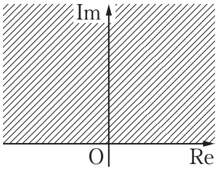
【解説】

［A］

$$w=\frac{z}{z+1} \iff w=1-\frac{1}{z+1}$$
$$\iff w-1=-\frac{1}{z+1}$$
$$\iff z+1=-\frac{1}{w-1}$$
$$\iff z=-1-\frac{1}{w-1}$$
$$\therefore\ z=\frac{-w}{w-1}$$

(1)

$$y>0$$
$$\iff \frac{z-\overline{z}}{2i}>0$$
$$\iff \frac{1}{2i}(z-\overline{z})>0$$
$$\iff \frac{1}{2i}\left(\frac{-w}{w-1}-\frac{-\overline{w}}{\overline{w}-1}\right)>0$$
$$\iff \frac{1}{2i|w-1|^2}\{-w(\overline{w}-1)+\overline{w}(w-1)\}>0$$
$$\iff \frac{1}{|w-1|^2}\cdot\frac{w-\overline{w}}{2i}>0$$
$$\therefore\ \frac{w-\overline{w}}{2i}>0$$

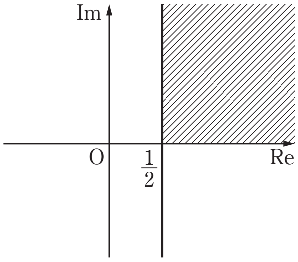


境界を含まない斜線部分

(2)

$$x^2+y^2>1 \iff |z|>1$$
$$\iff \left|\frac{-w}{w-1}\right|>1$$
$$\iff |w|>|w-1|$$

これと(1)の結果をあわせて



境界を含まない斜線部分

(3)

$$|x|<\frac{1}{2} \iff \left|\frac{z+\overline{z}}{2}\right|<\frac{1}{2}$$
$$\iff -1<z+\overline{z}<1$$

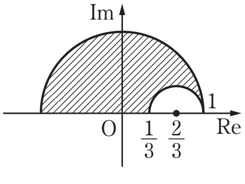
ここで

$$z+\overline{z}=\frac{-w}{w-1}+\frac{-\overline{w}}{\overline{w}-1}$$
$$=\frac{-w\overline{w}+w-w\overline{w}+\overline{w}}{|w-1|^2}$$

より

$$|x|<\frac{1}{2}$$
$$\iff -|w-1|^2<-2w\overline{w}+w+\overline{w}<|w-1|^2$$
$$\iff w\overline{w}<1 \text{ かつ } w\overline{w}-\frac{2}{3}w-\frac{2}{3}\overline{w}+\frac{1}{3}>0$$
$$\iff |w|<1 \text{ かつ } \left|w-\frac{2}{3}\right|>\frac{1}{3}$$

これと(1)の結果をあわせて

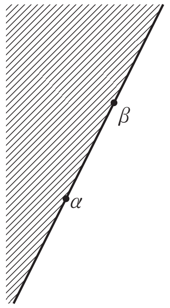


境界を含まない斜線部分

［B］ (1) $\dfrac{z-\beta}{z-\alpha}$ の虚数部分が正であるので

$$\frac{\beta-z}{\alpha-z}=r(\cos\theta+i\sin\theta)\ (r>0,\ 0<\theta<\pi)$$

とおける．ここで A(α)，B(β)，P(z) とすると P を中心に A から B までの角が 0 より大きく π 未満であるので，z の存在する範囲は下図．



境界を含まない斜線部分

(2) $z=\alpha$ とすると

$$(\text{与式})\iff(z-\beta)(z-\gamma)=0$$

よって $z=\beta$ または $z=\gamma$ となり，α，β，γ が互いに異なることに矛盾．よって $z-\alpha\neq0$．
このとき

$$\begin{aligned}(\text{与式})&\iff\frac{z-\beta}{z-\alpha}+\frac{z-\beta}{z-\alpha}\cdot\frac{z-\gamma}{z-\alpha}+\frac{z-\gamma}{z-\alpha}=0\\&\iff\left(\frac{z-\beta}{z-\alpha}+1\right)\left(\frac{z-\gamma}{z-\alpha}+1\right)=1\quad\cdots\cdots①\end{aligned}$$

ここで $\dfrac{z-\beta}{z-\alpha}+1=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とおくと

$$\frac{z-\beta}{z-\alpha}=(r\cos\theta-1)+(r\sin\theta)i$$

となる．また

$$\begin{aligned}①\iff\frac{z-\gamma}{z-\alpha}+1&=\frac{1}{r(\cos\theta+i\sin\theta)}\\&=\frac{1}{r}(\cos\theta-i\sin\theta)\\\therefore\ \frac{z-\gamma}{z-\alpha}&=\frac{1}{r}\cos\theta-1+\left(-\frac{1}{r}\sin\theta\right)i\end{aligned}$$

より $\dfrac{z-\beta}{z-\alpha}$ と $\dfrac{z-\gamma}{z-\alpha}$ の虚数部分は共に 0 か異符号となる．

虚数部分が共に 0 のとき α，β，γ が同一直線上にあるか，z が α，β と α，γ の交点つまり $z=\alpha$ となるがどちらも不適．

よって，$\dfrac{z-\beta}{z-\alpha}$ と $\dfrac{z-\alpha}{z-\gamma}$ の虚数部分は同符号となる．

$\dfrac{z-\alpha}{z-\gamma}$ と $\dfrac{z-\gamma}{z-\beta}$ の虚数部分についても同様に同符号といえるので

$$\frac{z-\beta}{z-\alpha},\ \frac{z-\gamma}{z-\beta},\ \frac{z-\alpha}{z-\gamma}\ \text{はすべて虚数部分が同符号となる.}$$

⑴よりこれは三角形の内部を表すので題意は示された.

第５講　媒介変数で表された曲線

5

［A］ 原点を中心として回転する半直線 L と L に接しながら動く半径１の円 C がある．時刻 $t=0$ では，半直線 L は y 軸の負の部分に一致しており，円 C は中心が $(1,\ 0)$ にあって原点で L に接しているとする．時刻 t では，半直線 L は原点を中心に正の向きに t だけ回転し，C は L 上を滑らずにころがって原点から $2t$ の距離の点Ｒで L に接しているとする．円の中心をＰとする．点Ｑは C の周上の定点で $t=0$ では原点にあるとする．

⑴ 時刻 t でのＰとＱの座標を媒介変数 t で表せ．

⑵ t が０から $\dfrac{\pi}{2}$ まで動くときのＰの軌跡を K_1 とし，Ｑの軌跡を K_2 とする．$(0,\ 0)$ と $(1,\ 0)$ を結ぶ線分，$(\pi,\ 1)$ と $(\pi,\ 2)$ を結ぶ線分および K_1 と K_2 で囲まれる部分の面積を求めよ．

［B］ 関数 $f(\theta)=\sqrt{2}\sin^2\theta+\cos\theta$ に対し，次の条件を満たす正の数 a を考える．

$$\begin{cases} |\theta|<a \text{ ならば } f(\theta)>0 \\ |\theta|=a \text{ ならば } f(\theta)=0 \end{cases}$$

⑴ a の値を求めよ．

⑵ 曲線 C を媒介変数 $\theta\ (-a\leqq\theta\leqq a)$ を用いて

$$C:\begin{cases} x=f(\theta) \\ y=\sin\theta \end{cases}$$

で定める．x 軸に平行な直線 $y=t$ と曲線 C が共有点をもつような実数 t の値の範囲を求め，共有点の x 座標を t で表せ．

⑶ 曲線 C と y 軸とで囲まれる図形を，y 軸のまわりに１回転してできる立体の体積を求めよ．

【答】 ［A］ ⑴ $\mathrm{P}(2t\sin t+\cos t,\ -2t\cos t+\sin t)$，$\mathrm{Q}(2t\sin t,\ -2t\cos t+2\sin t)$

⑵ $\dfrac{3}{4}\pi$

［B］ ⑴ $a=\dfrac{3}{4}\pi$ ⑵ $-1\leqq t\leqq 1$，$x=\begin{cases} \sqrt{2}\,t^2+\sqrt{1-t^2} & \left(|t|<\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ \sqrt{2}\,t^2\pm\sqrt{1-t^2} & \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leqq|t|\leqq 1\right) \end{cases}$

⑶ $\sqrt{2}\,\pi\left(\dfrac{14}{15}+\dfrac{3}{8}\pi\right)$

【解説】

［A］ ⑴

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=2t\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}+t\right),\ \sin\left(-\frac{\pi}{2}+t\right)\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{RP}}=(\cos t,\ \sin t)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(\cos(\pi-t),\ \sin(\pi-t))$$

となるので，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\overrightarrow{\mathrm{OR}}+\overrightarrow{\mathrm{RP}}\\&=2t(\sin t,\ -\cos t)+(\cos t,\ \sin t)\\&=\boldsymbol{(2t\sin t+\cos t,\ -2t\cos t+\sin t)}\\\overrightarrow{\mathrm{OQ}}&=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\\&=\boldsymbol{(2t\sin t,\ -2t\cos t+2\sin t)}\end{aligned}$$

(2)　K_1，K_2 の表す曲線はそれぞれ

$$K_1:\begin{cases}x_1=2t\sin t+\cos t\\y_1=-2t\cos t+\sin t\end{cases}$$

$$K_2:\begin{cases}x_2=2t\sin t\\y_2=-2t\cos t+2\sin t\end{cases}$$

とおけるので，求める面積は

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}y_2dx_2-\int_1^{\pi}y_1dx_1&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-2t\cos t+2\sin t)\cdot 2(\sin t+t\cos t)dt\\&\quad-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-2t\cos t+\sin t)\cdot(\sin t+2t\cos t)dt\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}3\sin^2 t\,dt\\&=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t)dt\\&=\frac{3}{2}\left[t-\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\&=\boldsymbol{\frac{3}{4}\pi}\end{aligned}$$

［B］ (1)

$$\begin{aligned}f(\theta)>0&\iff\sqrt{2}\sin^2\theta+\cos\theta>0\\&\iff\sqrt{2}\cos^2\theta-\cos\theta-\sqrt{2}<0\\&\iff(\sqrt{2}\cos\theta+1)(\cos\theta-\sqrt{2})<0\\&\iff\cos\theta>-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

$-\pi<\theta\leqq\pi$ の範囲でこの不等式を解くと $-\dfrac{3}{4}\pi<\theta<\dfrac{3}{4}\pi$ であるので，$\boldsymbol{a=\dfrac{3}{4}\pi}$

(2)

$$\begin{aligned}y=t&\iff\sin\theta=t\\&\iff\boldsymbol{-1\leqq t\leqq 1}\quad\left(-\frac{3}{4}\leqq\theta\leqq\frac{3}{4}\pi\text{ より}\right)\end{aligned}$$

また $|t|\geqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき $\sin\theta=t$ を満たす θ は２つ存在し，$|t|<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のときは１つ存在しているので

$$x=\sqrt{2}\sin^2\theta+\cos\theta=\begin{cases}\boldsymbol{\sqrt{2}t^2\pm\sqrt{1-t^2}}&\left(\boldsymbol{|t|\geqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}}\right)\\\boldsymbol{\sqrt{2}t^2+\sqrt{1-t^2}}&\left(\boldsymbol{|t|<\dfrac{1}{\sqrt{2}}}\right)\end{cases}$$

(3)　(2)より求める体積 V について，対称性に注目すると

$$\frac{1}{2}V=\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\pi\{(\sqrt{2}\,t^2+\sqrt{1-t^2})^2-(\sqrt{2}\,t^2-\sqrt{1-t^2})^2\}dt+\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\pi(\sqrt{2}\,t^2+\sqrt{1-t^2})^2dt$$

$$=\pi\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}4\sqrt{2}\,t^2\sqrt{1-t^2}\,dt+\pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(2t^4-t^2+1+2\sqrt{2}\,t^2\sqrt{1-t^2})dt$$

ここで

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(2t^4-t^2+1)dt=\left[\frac{2}{5}t^5-\frac{1}{3}t^3+t\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$=\left[\frac{1}{15}t(6t^4-5t^2+15)\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{7\sqrt{2}}{15}$$

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}t^2\sqrt{1-t^2}\,dt=\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}\cos^2\theta\sin\theta\cdot(-\sin\theta\,d\theta)$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{4}\sin^2 2\theta\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{8}(1-\cos 4\theta)d\theta$$

$$=\left[\frac{1}{8}\left(\theta-\frac{1}{4}\sin 4\theta\right)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{32}$$

同様に

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}t^2\sqrt{1-t^2}\,dt=\left[\frac{1}{8}\left(\theta-\frac{1}{4}\sin 4\theta\right)\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{32}$$

であるので

$$\frac{1}{2}V=4\sqrt{2}\,\pi\times\frac{\pi}{32}+\pi\times\frac{7\sqrt{2}}{15}+2\sqrt{2}\,\pi\times\frac{\pi}{32}$$

$$\therefore\quad V=\frac{3\sqrt{2}}{8}\pi^2+\frac{14\sqrt{2}}{15}\pi=\boldsymbol{\sqrt{2}\,\pi\left(\frac{14}{15}+\frac{3}{8}\pi\right)}$$

第６講　２次曲線と極座標

6

［A］ 媒介変数 θ を用いて表される曲線

$$C: x=\sin\theta,\quad y=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\quad (0\leqq\theta\leqq 2\pi)$$

がある．

(1) x と y の間の関係式を求めよ．

(2) 曲線 C の概形をかけ．

(3) 曲線 C の囲む図形を y 軸のまわりに１回転してできる立体の体積を求めよ．

［B］ 点Pの極座標 $(r,\ \theta)$ が次の極方程式を満たす．

$$r=2\cos\theta+2\sin\theta$$

ここで，極方程式においては，r が負である極座標の点も考える．すなわち，$r>0$ のとき，極座標 $(-r,\ \theta)$ は $(r,\ \theta+\pi)$ と同じ点を表すものとする．次の問いに答えよ．

(1) θ が $\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲を動くとき，点Pの軌跡を求め図示せよ．

(2) θ が $\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲を動くとき，$|r|$ の最小値 r_1 とそれを与える θ_1，および $|r|$ の最大値 r_2 とそれを与える θ_2 を求めよ．

(3) θ が $\frac{3}{4}\pi\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲を動くとき，Pが描く図形の長さを求めよ．

【答】 ［A］ (1) $2x^2-2xy+y^2=1$　(2) 略　(3) $\frac{2(2+\sqrt{2})}{3}\pi$

［B］ (1) 略　(2) $\begin{cases} r_1=0 & \left(\theta_1=\frac{3}{4}\pi\right) \\ r_2=2 & \left(\theta_2=\frac{\pi}{2},\ \pi\right)\end{cases}$　(3) $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$

【解説】

［A］ (1)

$$\begin{aligned} y&=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\\ &=\sqrt{2}\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{4}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{4}\right)\\ &=\sin\theta+\cos\theta\end{aligned}$$

よって

$$\begin{cases}\sin\theta=x\\ \cos\theta=y-x\end{cases}$$

となるので

$$\begin{aligned} &\sin^2\theta+\cos^2\theta=1\\ \iff\ &x^2+(y-x)^2=1\\ \iff\ &\boldsymbol{2x^2-2xy+y^2=1}\end{aligned}$$

(2) $\begin{cases} x=\sin\theta \\ y=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right) \end{cases}$ より

$$\frac{dx}{d\theta}=\cos\theta$$

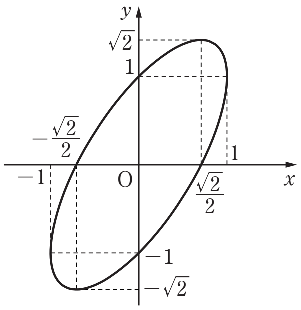
$$\frac{dy}{d\theta}=\sqrt{2}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{5}{4}\pi$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
x'	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
y'	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$(x,\ y)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\swarrow$		$\nwarrow$		$\nearrow$	

ここで $\theta=0,\ \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5}{4}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi,\ 2\pi$ に対応する点の座標はそれぞれ

$$(0,\ 1),\ \left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \sqrt{2}\right),\ (1,\ 1),\ \left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\sqrt{2}\right),$$
$$(-1,\ -1),\ (0,\ 1)$$

となるので曲線 C は下図.



(3)
$$2x^2-2xy+y^2=1$$
$$\iff\quad x=\frac{1}{2}(y\pm\sqrt{2-y^2})$$

これと(2)のグラフの対称性より求める体積を V とすると,

$$\frac{V}{2\pi}=\int_0^{\sqrt{2}}\frac{1}{4}(y+\sqrt{2-y^2})^2dy-\int_1^{\sqrt{2}}\frac{1}{4}(y-\sqrt{2-y^2})^2dy$$
$$=\frac{1}{4}\left\{\int_0^{\sqrt{2}}(2+2y\sqrt{2-y^2})dy-\int_1^{\sqrt{2}}(2-2y\sqrt{2-y^2})dy\right\}$$
$$=\frac{1}{4}\left\{\left[2y-\frac{2}{3}(2-y^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\sqrt{2}}-\left[2y+\frac{2}{3}(2-y^2)^{\frac{3}{2}}\right]_1^{\sqrt{2}}\right\}$$
$$=\frac{1}{4}\left\{2\sqrt{2}+\frac{4}{3}\sqrt{2}-2\sqrt{2}+\left(2+\frac{2}{3}\right)\right\}$$
$$=\frac{2+\sqrt{2}}{3}$$

$$\therefore\quad V=\frac{2(2+\sqrt{2})}{3}\pi$$

［B］(1)(Ⅰ)　$r=0$ のとき，

$$2\cos\theta+2\sin\theta=0$$
$$\Longleftrightarrow\quad 2\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=0$$
$$\therefore\quad \theta=\frac{3}{4}\pi\quad\left(\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\pi\text{ より}\right)$$

よって

$$(x,\ y)=(0,\ 0)$$

(Ⅱ)　$r\neq0$ のとき $\left(\theta\neq\frac{3}{4}\pi\text{ のとき}\right)$

$$r=2\cos\theta+2\sin\theta$$
$$\Longleftrightarrow\quad r^2=2r\cos\theta+2r\sin\theta$$
$$\Longleftrightarrow\quad x^2+y^2=2x+2y$$
$$\Longleftrightarrow\quad (x-1)^2+(y-1)^2=2$$

ここで $\frac{\pi}{2}\leqq\theta<\frac{3}{4}\pi$ のとき

$$r=2\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)>0$$

よって

$$x=r\cos\theta\leqq0,\ y=r\sin\theta>0$$

また $\frac{3}{4}\pi<\theta\leqq\pi$ のときも同様に

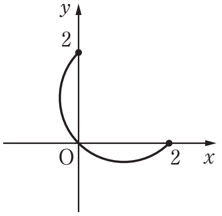
$$r<0,\ x=r\cos\theta>0,\ y=r\sin\theta\leqq0$$

よって

$$(x-1)^2+(y-1)^2=2\text{ の }0<x+y\leqq2\text{ の部分}$$

(Ⅰ)(Ⅱ)より求める軌跡は

$$(x-1)^2+(y-1)^2=2\text{ かつ }xy\leqq0$$



(2)　(1)より

$$\begin{cases} \boldsymbol{r_1=0} & \left(\boldsymbol{\theta_1=\frac{3}{4}\pi}\right) \\ \boldsymbol{r_2=2} & \left(\boldsymbol{\theta_2=\frac{\pi}{2},\ \pi}\right) \end{cases}$$

(3)　(1)より $\frac{3}{4}\pi \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲を動くとき，P は半径 $\sqrt{2}$ の 4 分の 1 円上を動くので，求める図形の長さは

$$2\times\sqrt{2}\times\pi\times\frac{1}{4}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}\pi}$$

第7講　よくある極限

7

［A］　次の極限を求めよ．ただし，必要であれば $x>0$ のとき $e^x>x$ が成り立つことを用いてよい．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}$　（n は自然数）

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{\sqrt{x}}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2^x}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to+0}x\log x$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{x}+\log x\right)$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to+0}x^{\sin x}$

［B］　次の極限を求めよ．

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}$$

【答】　［A］　(1) 0　(2) 0　(3) 0　(4) 0　(5) 0　(6) ∞　(7) 1

［B］　$\dfrac{1}{3}$

【解説】

［A］　(1)　$x>0$ のとき $e^x>x$ が成り立つことより，$x=\dfrac{t}{2}$ とおくと，$\dfrac{t}{2}>0$ のとき $e^{\frac{t}{2}}>\dfrac{t}{2}$ が成り立つ，この両辺を 2 乗することで $e^t>\dfrac{t^2}{4}$ を得る．よって $\dfrac{4}{t}>\dfrac{t}{e^t}$ となるが，

$\dfrac{t}{2}>0$ つまり $t>0$ のとき $\dfrac{t}{e^t}>0$ なので $\dfrac{4}{t}>\dfrac{t}{e^t}>0$

ここで $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{4}{t}=0$ より $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=\mathbf{0}$

(2)　$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{x}{n}}{e^{\frac{x}{n}}}\right)^n\cdot n^n=\mathbf{0}$$

(3)　$\log x=2t$ とおくと $x=e^{2t}$ であり，$x\to\infty$ のとき $t\to\infty$ なので

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{\sqrt{x}}=\lim_{t\to\infty}\frac{2t}{\sqrt{e^{2t}}}=\lim_{t\to\infty}2\cdot\frac{t}{e^t}=\mathbf{0}$$

(4)　$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\log2)x}{e^{(\log2)x}}\cdot\frac{1}{\log2}=\mathbf{0}$$

(5)　$\log x=-t$ とおくと，$x=e^{-t}$ であり，$x\to+0$ のとき $t\to\infty$ なので

$$\lim_{x\to+0} x\log x=\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{t}{e^t}\right)=\mathbf{0}$$

(6)　$\displaystyle\lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{x}+\log x\right)=\lim_{x\to+0}\frac{1+x\log x}{x}=\infty$

(7)　$\displaystyle\lim_{x\to+0} x^{\sin x}=\lim_{x\to+0} e^{\log x^{\sin x}}=\lim_{x\to+0} e^{\sin x\log x}=\lim_{x\to+0} e^{\frac{\sin x}{x}x\log x}=\mathbf{1}$

［B］　$x>0$ のとき $x-\dfrac{1}{6}x^3<\sin x<x-\dfrac{1}{6}x^3+\dfrac{1}{120}x^5$ が成り立つので，

$$x(1-\cos x)-\frac{1}{6}x^3<\sin x-x\cos x<x(1-\cos x)-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5$$

ここで $1-\cos x=\dfrac{\sin^2 x}{1+\cos x}$ より

$$\frac{x\sin^2 x}{1+\cos x}-\frac{1}{6}x^3<\sin x-x\cos x<\frac{x\sin^2 x}{1+\cos x}-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5$$

よって $\dfrac{1}{1+\cos x}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2-\dfrac{1}{6}<\dfrac{\sin x-x\cos x}{x^3}<\dfrac{1}{1+\cos x}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2-\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{120}x^2$

ここで $\displaystyle\lim_{x\to+0}\left\{\frac{1}{1+\cos x}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2-\frac{1}{6}\right\}=\lim_{x\to+0}\left\{\frac{1}{1+\cos x}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2-\frac{1}{6}+\frac{1}{120}x^2\right\}=\frac{1}{3}$

より $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}=\frac{1}{3}$

$x<0$ のとき $x-\dfrac{1}{6}x^3>\sin x>x-\dfrac{1}{6}x^3+\dfrac{1}{120}x^5$ が成り立つので，$x>0$ のときと同様に

$\displaystyle\lim_{x\to-0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}=\frac{1}{3}$ を得る．

よって　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}=\mathbf{\frac{1}{3}}$

第８講　挟んで極限

8

［A］ n が自然数とする．3 次方程式

$$(*)\quad 2x^3+3nx^2-3(n+1)=0$$

について次の問いに答えよ．

(1) 自然数 n の値にかかわらず方程式 $(*)$ は正の解をただ 1 つだけもつことを証明せよ．

(2) 方程式 $(*)$ の正の解を a_n とする．このとき，極限値 $\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ．

［B］ a は $0<a<\pi$ を満たす定数とする．$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ に対し，$n\pi<x<(n+1)\pi$ の範囲に $\sin(x+a)=x\sin x$ を満たす x がただ 1 つ存在するので，この x の値を x_n とする．

(1) 極限値 $\lim_{n\to\infty}(x_n-n\pi)$ を求めよ．

(2) 極限値 $\lim_{n\to\infty}n(x_n-n\pi)$ を求めよ．

【答】 ［A］ (1) 略　(2) $\lim_{n\to\infty}a_n=1$

［B］ (1) $\lim_{n\to\infty}(x_n-n\pi)=0$　(2) $\lim_{n\to\infty}n(x_n-n\pi)=\dfrac{\sin a}{\pi}$

【解説】

［A］ (1) $f(x)=2x^3+3nx^2-3(n+1)$ とおくと，

$f'(x)=6x(x+n)$ より $f(x)$ の増減は

x	$\cdots$	$-n$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

となる．ここで

$$f(0)=-3(n+1)<0$$
$$f(2)=9n+13>0$$

より $(*)$ は $0<x<2$ にただ 1 つだけ正の解をもつ．

(2) $f(1)=-1<0$ より

$$1<a_n<2$$

ここで

$$2a_n{}^3+3na_n{}^2-3(n+1)=0$$
$$\iff n\cdot 3(a_n+1)(a_n-1)=3-2a_n{}^3$$
$$\iff a_n-1=\frac{3-2a_n{}^3}{3(a_n+1)}\cdot\frac{1}{n}$$

$$\therefore\quad |a_n-1|=\left|\frac{3-2a_n{}^3}{3(a_n+1)}\right|\cdot\frac{1}{n}$$

$$\leqq\frac{13}{6}\cdot\frac{1}{n}\to 0\ (n\to\infty)$$

よって　$\lim_{n\to\infty}|a_n-1|=0$ より

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}a_n=1}$$

［B］(1)

$$\sin(x+a)=x\sin x$$

$$\Longleftrightarrow\ \sin x\cos a+\cos x\sin a=x\sin x$$

$$\Longleftrightarrow\ \cos a+\frac{\sin a}{\tan x}=x$$

$$\Longleftrightarrow\ \frac{\sin a}{x-\cos a}=\tan x$$

より

$$\tan(x_n-n\pi)=\tan x_n$$

$$=\frac{\sin a}{x_n-\cos a}\quad\cdots\cdots①$$

ここで $n\pi<x_n<(n+1)\pi$ より $n\to\infty$ のとき $x_n\to\infty$ であるので

$$\lim_{n\to\infty}\tan(x_n-n\pi)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin a}{x_n-\cos a}=+0$$

ここで，$0<a<\pi$ より $\sin a>0$，$x_n>n\pi$，$|\cos a|\leqq1$ より $\dfrac{\sin a}{x_n-\cos a}>0$ であることと，

$0<x_n-n\pi<\pi$ より

$$0<x_n-n\pi<\frac{\pi}{2}$$

ゆえに

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}(x_n-n\pi)=0}$$

(2)　(1)より $0<x_n-n\pi<\dfrac{\pi}{2}$．$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$\sin\theta<\theta<\tan\theta$$

であることを用い，①に注意すると，

$$\sin(x_n-n\pi)<x_n-n\pi<\tan(x_n-n\pi)$$

$$\Longleftrightarrow\ \frac{\sin(x_n-n\pi+a)}{x_n}<x_n-n\pi<\frac{\sin a}{x_n-\cos a}$$

$$\Longleftrightarrow\ \frac{\sin(x_n-n\pi+a)}{\dfrac{x_n}{n}}<n(x_n-n\pi)<\frac{\sin a}{\dfrac{x_n}{n}-\dfrac{\cos a}{n}}$$

ここで $\pi<\dfrac{x_n}{n}<\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\pi$ より　$\lim_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{n}=\pi$，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(x_n-n\pi+\alpha)}{\dfrac{x_n}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\alpha}{\dfrac{x_n}{n}-\dfrac{\cos\alpha}{n}}=\frac{\sin\alpha}{\pi}$$

であるので

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}n(x_n-n\pi)=\frac{\sin\alpha}{\pi}}$$

第9講　ちょっと難あり極限

9

［A］　曲線 $C : y=e^x$ と直線 $l : y=ax+b$ $(a>0)$ が2点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ と $\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ で交わっている．ただし，$x_2-x_1=c(>0)$ で $\mathrm{PQ}=1$ であるとき，

$$\lim_{a\to\infty}\frac{{y_2}^2-{y_1}^2}{a}$$

を求めよ．

［B］　$P_m=\dfrac{(3m)!}{3^{3m}(m!)^3}$ に対して $\displaystyle\lim_{m\to\infty}P_m$ を求めよ．

【答】［A］　2

［B］　$\displaystyle\lim_{m\to\infty}P_m=0$

【解説】

［A］　2点P，Qはいずれも C 上かつ l 上の点であるので

$$\begin{cases} y_1=e^{x_1} & \cdots\cdots① \\ y_2=e^{x_2} & \cdots\cdots② \end{cases}\qquad \begin{cases} y_1=ax_1+b & \cdots\cdots③ \\ y_2=ax_2+b & \cdots\cdots④ \end{cases}$$

②÷①より

$$\frac{y_2}{y_1}=e^{x_2-x_1}=e^c \qquad \therefore\quad y_2=e^cy_1$$

④－③より

$$y_2-y_1=a(x_2-x_1)=ac$$

よって

$$e^cy_1-y_1=ac \qquad \therefore\quad y_1=\frac{ac}{e^c-1}$$

ゆえに

$$y_2=\frac{ace^c}{e^c-1}$$

また

$$\mathrm{PQ}=1 \iff \sqrt{1+a^2}\,c=1 \quad \cdots\cdots⑤$$

このとき

$$\frac{{y_2}^2-{y_1}^2}{a}=\frac{(y_2+y_1)(y_2-y_1)}{a}$$

$$=\frac{1}{a}\cdot\frac{ac(e^c+1)}{e^c-1}\cdot ac$$

ここで⑤より

$$a\to\infty \text{ のとき } c\to 0$$

であり，このとき

$$\frac{c}{e^c-1}\to 1 \ (c\to 0)$$

$(1+a^2)c^2=1$ より

$$ac=\sqrt{1-c^2}\to 1\ (c\to 0)$$

であるから

$$\frac{{y_2}^2-{y_1}^2}{a}=ac\cdot\frac{c}{e^c-1}\cdot(e^c+1)\to\mathbf{2}\ (a\to\infty)$$

［B］ 2 以上の自然数 m に対し

$$\frac{P_m}{P_{m-1}}=\frac{\dfrac{(3m)!}{3^{3m}(m!)^3}}{\dfrac{\{3(m-1)\}!}{3^{3(m-1)}\{(m-1)!\}^3}}=\frac{(3m-1)(3m-2)}{9m^2}$$

となるが，

$$\frac{(3m-1)(3m-2)}{9m^2}-\frac{m}{m+1}$$
$$=\frac{1}{9m^2(m+1)}\{(m+1)(3m-1)(3m-2)-9m^3\}$$
$$=\frac{-7m+2}{9m^2(m+1)}<0\quad(m>1\text{ より})$$

よって

$$\frac{P_m}{P_{m-1}}<\frac{m}{m+1}\qquad\therefore\quad P_m<\frac{m}{m+1}P_{m-1}$$

これより

$$0<P_m<\frac{m}{m+1}P_{m-1}<\frac{m}{m+1}\cdot\frac{m-1}{m}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{3}P_1$$
$$=\frac{4}{9(m+1)}\to 0\ (m\to\infty)$$

ゆえに

$$\lim_{m\to\infty}\boldsymbol{P_m}=\mathbf{0}$$

第10講　一般項を求めないで極限

10

［A］ $f(x)=\dfrac{5}{x^2+4}$ として，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1=2,\qquad a_{n+1}=f(a_n)$$

で定義する．このとき，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ を求めよ．

［B］ x の関数 $f(x)$ が $0\leqq x\leqq 1$ において連続で $0<f(0)<1$，$f(1)=0$ を満たすとする．

また，$f(x)$ は $0<x<1$ において微分可能であり，この区間で $f'(x)<0$ かつ $|f'(x)|\leqq\dfrac{1}{2}$ を満たすとする．

このとき $0<a_1<1$，$a_{n+1}=f(a_n)$ を満たす数列 $\{a_n\}$ に対し，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ を求めよ．

【答】 ［A］ $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$

［B］ $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$（ただし α は $f(\alpha)=\alpha$ かつ $0<\alpha<1$ を満たす実数）

【解説】

［A］ $f(x)=\dfrac{5}{x^2+4}>0$ であり，これと $a_1=2>0$ より帰納的に $a_n>0$ である．

次に

$$f(x)-1=\frac{5}{x^2+4}-1$$
$$=-\frac{x+1}{x^2+4}(x-1)$$

であり，$x>0$ のとき $x+1>0$ なので

$$0<\frac{x+1}{x^2+4}=\cfrac{1}{x-1+\cfrac{5}{x+1}}$$
$$=\cfrac{1}{x+1+\cfrac{5}{x+1}-2}$$
$$\leqq\frac{1}{2\sqrt{(x+1)\dfrac{5}{x+1}}-2}=\frac{1+\sqrt{5}}{8}\ \text{が成り立つ．}$$

$$\therefore\quad 0<\frac{x+1}{x^2+4}<\frac{1}{2}\ \text{である．}$$

よって

$$|f(x)-1|=\left|-\frac{x+1}{x^2+4}\right||x-1|$$
$$<\frac{1}{2}|x-1|$$

となる．

ここで

$$|f(a_n)-1|<\frac{1}{2}|a_n-1|$$

$$\therefore\quad |a_{n+1}-1|<\frac{1}{2}|a_n-1|$$

が成り立つので

$$|a_n-1|<\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}|a_1-1|$$

ここで $0<\frac{1}{2}<1$ より

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}|a_1-1|\to 0\ (n\to\infty)$$

ゆえに

$$\lim_{n\to\infty}|a_n-1|=0\qquad \therefore\quad \boldsymbol{\lim_{n\to\infty}a_n=1}$$

［B］　条件より，$f(x)=x$ かつ $0<x<1$ を満たす実数がただ1つだけ存在する．それを α とおくと，α は $f(\alpha)=\alpha$ かつ $0<\alpha<1$ を満たす．

　また，条件より $0<x<1$ なる x に対しては $0<f(x)<1$ なので，$0<a_1<1$ より，帰納的に $0<a_n<1$ を得る．

このとき

$$a_{n+1}-\alpha=f(a_n)-f(\alpha)$$

が成り立つが，平均値の定理より

$$f(a_n)-f(\alpha)=(a_n-\alpha)f'(\theta)$$

を満たす θ が a_n と α の間に存在し，この式は $a_n=\alpha$ のときにも成立するので，

$|f'(\theta)|\leqq\frac{1}{2}$ を用いると

$$|a_{n+1}-\alpha|=|f(a_n)-f(\alpha)|=|f'(\theta)||a_n-\alpha|\leqq\frac{1}{2}|a_n-\alpha|$$

が成り立つ．

よって $|a_n-\alpha|\leqq\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}|a_1-\alpha|$ となるが，

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}|a_1-\alpha|=0$ より $|a_n-\alpha|\to 0\ (n\to\infty)$

よって　$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha}$ **（ただし $\boldsymbol{\alpha}$ は $\boldsymbol{f(\alpha)=\alpha}$ かつ $\boldsymbol{0<\alpha<1}$ を満たす実数）**

第 11 講　無限級数

11

［A］　次の無限級数の収束・発散を調べよ．

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}+\cdots\cdots$$

［B］　正数からなる数列 $\{a_n\}$ が，条件 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k)^2=n^2+2n$ を満たしているとする．このとき，数列 $\left\{\dfrac{a_1+\cdots+a_n}{n^r}\right\}$ が収束する実数 r の範囲を求めよ．また，収束する場合，その極限値を求めよ．

【答】［A］　発散する

［B］　収束する r の範囲　$r \geqq \dfrac{3}{2}$，極限値 $\begin{cases} \dfrac{2\sqrt{2}}{3} & \left(r=\dfrac{3}{2}\right) \\ 0 & \left(r>\dfrac{3}{2}\right) \end{cases}$

【解説】

［A］　$y=\dfrac{1}{x}$ のグラフより面積の大小に注目すると

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}>\frac{1}{n}+\int_1^n\frac{1}{x}dx$$

が成り立つが，$\dfrac{1}{n}+\displaystyle\int_1^n\frac{1}{x}dx=\frac{1}{n}+\Big[\log x\Big]_1^n=\log n+\frac{1}{n}\to\infty$ $(n\to\infty)$ より与式は**発散する**．

［B］

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k)^2=n^2+2n \quad \cdots\cdots①$$

$n=1$ のとき

$$① \iff {a_1}^2=1^2+2\times1 \qquad \therefore \quad a_1=\sqrt{3}$$

$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}{a_n}^2&=(n^2+2n)-\{(n-1)^2+2(n-1)\}\\&=2n+1\end{aligned}$$

$$\therefore \quad a_n=\sqrt{2n+1}\ （これは\ n=1\ のときも成り立つ）$$

よって

$$\int_0^n\sqrt{2x+1}\,dx<\sum_{k=1}^{n}\sqrt{2k+1}<\int_1^{n+1}\sqrt{2x+1}\,dx$$

$$\iff \left[\frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^n<\sum_{k=1}^{n}a_k<\left[\frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_1^{n+1}$$

$$\iff \frac{(2n+1)^{\frac{3}{2}}-1}{3}<\sum_{k=1}^{n}a_k<\frac{(2n+3)^{\frac{3}{2}}-3\sqrt{3}}{3}$$

$$\iff \frac{(2n+1)^{\frac{3}{2}}-1}{3n^r}<\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k}{n^r}<\frac{(2n+3)^{\frac{3}{2}}-3\sqrt{3}}{3n^r}$$

ここで

$$\frac{(2n+1)^{\frac{3}{2}}-1}{3n^r}=\frac{n^{\frac{3}{2}}\left\{\left(2+\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right\}}{3n^r}$$

$$=\frac{1}{3}n^{\frac{3}{2}-r}\left\{\left(2+\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right\}\quad\cdots\cdots(*)$$

となるが $\frac{3}{2}-r>0$ つまり $r<\frac{3}{2}$ のとき

$$(*)\to\infty \text{ より}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_1+\cdots+a_n}{n^r}=\infty$$

となり収束しない.

$\frac{3}{2}-r=0$ つまり $r=\frac{3}{2}$ のとき

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^{\frac{3}{2}}-1}{3n^r}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left\{\left(2+\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right\}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)^{\frac{3}{2}}-3\sqrt{3}}{3n^r}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left\{\left(2+\frac{3}{n}\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{3\sqrt{3}}{n^{\frac{3}{2}}}\right\}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

よって

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+\cdots+a_n}{n^r}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$\frac{3}{2}-r<0$ つまり $r>\frac{3}{2}$ のとき

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^{\frac{3}{2}}-1}{3n^r}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3n^{r-\frac{3}{2}}}\left\{\left(2+\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right\}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)^{\frac{3}{2}}-3\sqrt{3}}{3n^r}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3n^{r-\frac{3}{2}}}\left\{\left(2+\frac{3}{n}\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{3\sqrt{3}}{n^{\frac{3}{2}}}\right\}=0$$

よって

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+\cdots+a_n}{n^r}=0$$

ゆえに収束する r の範囲は $r \geqq \dfrac{3}{2}$ で，そのときの極限値は

$$\begin{cases} \dfrac{2\sqrt{2}}{3} & \left(r=\dfrac{3}{2}\right) \\ 0 & \left(r>\dfrac{3}{2}\right) \end{cases}$$

第12講　微分について

12

［A］　関数 $f(x)$，$g(x)$ はいずれも $x \geqq 0$ において連続で，かつ $g(x)>0$ であるとする．さらに $x \geqq 0$ において関数 $H(x)$，$G(x)$ を

$$H(x)=\int_0^x f(t)g(t)dt$$

$$G(x)=\int_0^x g(t)dt$$

と定義する．次の各問いに答えよ．

(1)　$b>0$ が与えられたとき，$x \geqq 0$ において関数 $P(x)$ を

$$P(x)=G(b)H(x)-H(b)G(x)$$

と定義すると

$$P'(c)=0$$

$$0<c<b$$

となる実数 c が存在することを示せ．

(2)　$b>0$ ならば，$\dfrac{H(b)}{G(b)}=f(c)$，$0<c<b$ となる実数 c が存在することを示せ．

(3)　関数 $f(x)$ が $x>0$ において単調増加なら，関数 $\dfrac{H(x)}{G(x)}$ も $x>0$ で単調増加であることを示せ．

［B］　連続な導関数をもつ関数 $f(x)$ と $g(x)$ について，それぞれ以下の問いに答えよ．

(1)　任意の実数 x に対して $f(x)$ は $f(2x)=2f(x)$ を満たすとする．

(ア)　$f'(x)=f'(0)$ を示せ．

(イ)　$f'(0)=3$ として $f(x)$ を求めよ．

(2)　任意の実数 x に対して $g(x)$ は $g(2x)=\{g(x)\}^2$ を満たすとする．

(ア)　$g(0)$ を求めよ．

(イ)　$g(x)$ を求めよ．ただし，$g(0)\neq 0$ とし，$g'(0)=2$ とする．

【答】　［A］　略

［B］　(1) (ア) 略　(イ) $f(x)=3x$　(2) (ア) $g(0)=0$，1　(イ) $g(x)=e^{2x}$

【解説】

［A］　(1)　条件より $H(x)$，$G(x)$ はともに $0 \leqq x \leqq b$ において連続で，$0<x<b$ において微分可能であるので，$P(x)$ も同様である．よって平均値の定理より

$$\frac{P(b)-P(0)}{b-0}=P'(c) \text{ かつ } 0<c<b$$

なる実数 c が存在するが

$$P(b)=G(b)H(b)-H(b)G(b)=0$$

$$P(0)=G(b)H(0)-H(b)G(0)=0$$

より題意は示された．

(2)　$P'(x)=G(b)f(x)g(x)-H(b)g(x)$ であることと $g(x)>0$ より $x>0$ において $G(x)>0$，それと(1)より

$$
\begin{aligned}
& P'(c)=0 \text{ かつ } 0<c<b \\
\iff\ & G(b)f(c)g(c)-H(b)g(c)=0 \text{ かつ } 0<c<b \\
\iff\ & G(b)f(c)=H(b) \text{ かつ } 0<c<b \\
\therefore\ & \frac{H(b)}{G(b)}=f(c) \text{ かつ } 0<c<b
\end{aligned}
$$

(3)　以下では(1)と(2)の c を用いる．

$P'(x)=G(b)g(x)\left\{f(x)-\dfrac{H(b)}{G(b)}\right\}$ より $P'(x)=G(b)g(x)\{f(x)-f(c)\}$ であるが，$f(x)$ が $x>0$ において単調増加であるから，

$$f(x)<f(c)\quad(0<x<c)$$
$$f(x)>f(c)\quad(c<x<b)$$

となり，これと $G(b)g(x)>0$ から，$P(x)$ $(0<x<b)$ の増減は下表のようになる．

x	0	$\cdots$	c	$\cdots$	b
$P'(x)$		$-$	0	$+$	
$P(x)$		↘		↗	

よって，$P(0)=P(b)=0$ から，$0<x<b$ のとき $P(x)=G(b)H(x)-H(b)G(x)<0$，つまり $\dfrac{H(x)}{G(x)}<\dfrac{H(b)}{G(b)}$ となる．

これは関数 $\dfrac{H(x)}{G(x)}$ が $x>0$ において単調増加であることを示している．

［B］(1)　(ア)

$$
\begin{aligned}
f'(2x)&=\lim_{h\to0}\frac{f(2x+h)-f(2x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(2x+2h)-f(2x)}{2h}\\
&=\lim_{h\to0}\frac{f(2(x+h))-f(2x)}{2h}\\
&=\lim_{h\to0}\frac{2f(x+h)-2f(x)}{2h}\\
&=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)
\end{aligned}
$$

よって n を自然数として帰納的に

$$f'(x)=f'\left(\frac{1}{2^n}x\right)$$

が成り立つが，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^n}x\right)=0$ であることと $f'(x)$ が連続であることより

$$f'(x)=\lim_{n\to\infty}f'\left(\frac{1}{2^n}x\right)=f'(0)$$

(イ)　$f'(0)=3$ より $f'(x)=3$

$$\therefore\quad f(x)=3x+C\quad (C\text{ は積分定数})$$

ここで，$f(2x)=2f(x)$ に $x=0$ を代入して

$$f(0)=2f(0)\qquad \therefore\quad f(0)=0$$

ゆえに $C=0$ となるので

$$\boldsymbol{f(x)=3x}$$

(2)　(ア)　$g(2x)=\{g(x)\}^2$ に $x=0$ を代入して

$$g(0)=\{g(0)\}^2\iff g(0)\{1-g(0)\}=0$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{g(0)=0,\ 1}$$

(イ)　$g(t)=0$ となる実数 t が存在するとすると，

$$g(2t)=\{g(t)\}^2=0$$

よって n を自然数として帰納的に $g(t)=g\left(\frac{1}{2^n}t\right)=0$ が成り立つ．

(ア)，$g(0)\neq 0$ より $g(0)=1$ となるが，

$$g'(0)=\lim_{n\to\infty}\frac{g\left(\frac{1}{2^n}t\right)-g(0)}{\frac{1}{2^n}t}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{t}\cdot 2^n\right)$$

これは $g'(0)=2$ に反する．よって $g(x)\neq 0$　ゆえに

$$g(2x)=\{g(x)\}^2>0$$

両辺の対数をとると

$$\log g(2x)=2\log g(x)$$

$f(x)=\log g(x)$ とおくと(1)より

$$f'(x)=f'(0)=\frac{g'(0)}{g(0)}=2$$

$$\therefore\quad f(x)=2x+C\quad (C\text{ は積分定数})$$

となるが，$f(0)=C=\log g(0)$ より

$$C=0\qquad \therefore\quad f(x)=2x$$

よって

$$\boldsymbol{g(x)=e^{2x}}$$

第13講　接線といえば

13

［A］ 正の数 c の k 乗根 $\sqrt[k]{c}$ （k は2以上の整数）の近似値を求めるため $f(x)=x^k-c$,

$g(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$ $(x>0)$ とおき，$\sqrt[k]{c}<a_1$，$a_{n+1}=g(a_n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とする．

(1) $\sqrt[k]{c}<a_n$ ならば，$\sqrt[k]{c}<a_{n+1}<a_n$ を示せ．

(2) $k=3$ のとき，$\sqrt[3]{c}<a_n$ ならば，$a_{n+1}-\sqrt[3]{c}<\dfrac{1}{\sqrt[3]{c}}(a_n-\sqrt[3]{c})^2$ を示せ．

(3) $k=3$，$c=2$，$a_1=1.3$ のとき，$a_5-\sqrt[3]{2}<\dfrac{1}{2^5\cdot10^{16}}$ を示せ．

［B］ $e^\pi>22$ を示せ．

【答】 略

【解説】

［A］ (1) $f'(x)=kx^{k-1}$ より

$$\begin{aligned}a_n-a_{n+1}&=a_n-g(a_n)\\&=a_n-\left(a_n-\frac{f(a_n)}{f'(a_n)}\right)\\&=\frac{f(a_n)}{f'(a_n)}\\&=\frac{{a_n}^k-c}{k{a_n}^{k-1}}>0\quad(\sqrt[k]{c}<a_n\text{ より})\end{aligned}$$

$$\therefore\quad a_n>a_{n+1}$$

また

$$\begin{aligned}a_{n+1}-\sqrt[k]{c}&=\left(a_n-\frac{{a_n}^k-c}{k{a_n}^{k-1}}\right)-\sqrt[k]{c}\\&=a_n-\sqrt[k]{c}-\frac{{a_n}^k-c}{k{a_n}^{k-1}}\end{aligned}$$

ここで $\alpha>\beta>0$ のとき

$$\begin{aligned}&\alpha-\beta\\&=\frac{\alpha^k-\beta^k}{\alpha^{k-1}+\alpha^{k-2}\beta+\cdots+\alpha\beta^{k-2}+\beta^{k-1}}\\&=\frac{\alpha^k-\beta^k}{\alpha^{k-1}\left\{1+\dfrac{\beta}{\alpha}+\cdots+\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{k-2}+\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{k-1}\right\}}\\&>\frac{\alpha^k-\beta^k}{k\alpha^{k-1}}\end{aligned}$$

であるから

$$a_{n+1}-\sqrt[k]{c}=a_n-\sqrt[k]{c}-\frac{{a_n}^k-c}{k{a_n}^{k-1}}>0$$

$$\therefore\quad a_{n+1}>\sqrt[k]{c}$$

以上より，$\sqrt[k]{c}<a_{n+1}<a_n$

(2)　$k=3$ のとき $a_{n+1}=a_n-\dfrac{a_n{}^3-c}{3a_n{}^2}$ より

$$a_{n+1}-\sqrt[3]{c}=a_n-\frac{a_n{}^3-c}{3a_n{}^2}-\sqrt[3]{c}$$
$$=(a_n-\sqrt[3]{c})\left(1-\frac{a_n{}^2+\sqrt[3]{c}\,a_n+\sqrt[3]{c^2}}{3a_n{}^2}\right)$$
$$=\frac{2a_n+\sqrt[3]{c}}{3a_n{}^2}(a_n-\sqrt[3]{c})^2$$

ここで

$$\frac{2x+\sqrt[3]{c}}{3x^2}=\frac{2}{3x}+\frac{\sqrt[3]{c}}{3x^2}$$

は $x>0$ の範囲で単調減少であるので，$a_n>\sqrt[3]{c}$ のとき

$$0<\frac{2a_n+\sqrt[3]{c}}{3a_n{}^2}<\frac{2\sqrt[3]{c}+\sqrt[3]{c}}{3(\sqrt[3]{c})^2}=\frac{1}{\sqrt[3]{c}}$$

であるので

$$a_{n+1}-\sqrt[3]{c}<\frac{1}{\sqrt[3]{c}}(a_n-\sqrt[3]{c})^2$$

(3)　(2)より

$$a_5-\sqrt[3]{2}<\frac{1}{\sqrt[3]{2}}(a_4-\sqrt[3]{2})^2$$
$$<\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^3(a_3-\sqrt[3]{2})^4$$
$$<\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^7(a_2-\sqrt[3]{2})^8$$
$$<\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^{15}(a_1-\sqrt[3]{2})^{16}$$
$$=\frac{1}{2^5}\cdot(1.3-\sqrt[3]{2})^{16}$$

ここで $1.2^3=1.728$，$1.3^3=2.197$ より

$$1.2^3<2<1.3^3 \qquad \therefore\quad 1.2<\sqrt[3]{2}<1.3$$

ゆえに

$$0<1.3-\sqrt[3]{2}<\frac{1}{10}$$

よって

$$a_5-\sqrt[3]{2}<\frac{1}{2^5\cdot 10^{16}}$$

［B］ $f(x)=e^x$ とおく．ここで $x=3$ における $y=f(x)$ の接線を $y=g(x)$ とおくと，
$f'(x)=e^x$ より $f'(3)=e^3$ なので，$g(x)=e^3(x-3)+e^3$ となる．
また $f'(x)=f''(x)=e^x>0$ より $y=f(x)$ は下に凸なグラフをもつので，$f(x)\geqq g(x)$（等号は $x=3$ のときだけ成立）となる．
$\pi\neq 3$ より $e^\pi=f(\pi)>g(\pi)$ が成立するが，$g(\pi)=e^3(\pi-2)>2.7^3(3.14-2)=22.43862$ となるので $e^\pi>22$ が示された．

第 14 講　グラフを描く

14

［A］ 次のグラフを描け.

(1) $y=\dfrac{\log(x+1)}{x}$

(2) $y=x^2-2^x$

［B］ $(x,\ y)=(\cos 2t,\ t\sin t)$ $(0\leqq t\leqq 2\pi)$ で定められる曲線を描け.

【答】 略

【解説】

［A］ (1) $f(x)=\dfrac{\log(x+1)}{x}$ とおくと $f'(x)=\dfrac{\dfrac{x}{x+1}-\log(x+1)}{x^2}$ となる.

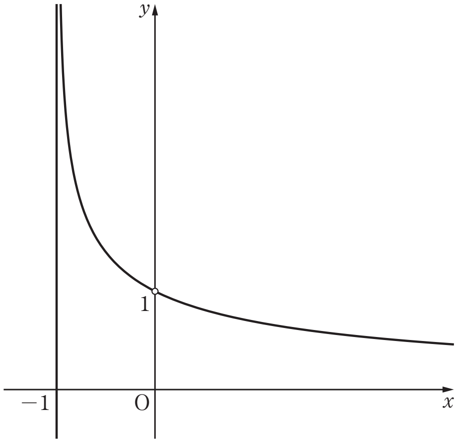
この分子を $g(x)$ とおくと，$g'(x)=-\dfrac{x}{(x+1)^2}$ であり，これと $g(0)=0$ より $g(x)$ の増減は

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	∞
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		↗	0	↘	

となる．これと $\lim_{x\to 0} f'(x)=-\dfrac{1}{2}$，$\lim_{x\to 0} f(x)=1$ などより，$f(x)$ の増減は

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$-$	$\left(-\dfrac{1}{2}\right)$	$-$	
$f(x)$	∞	↘	(1)	↘	0

となるので，求めるグラフは下図.



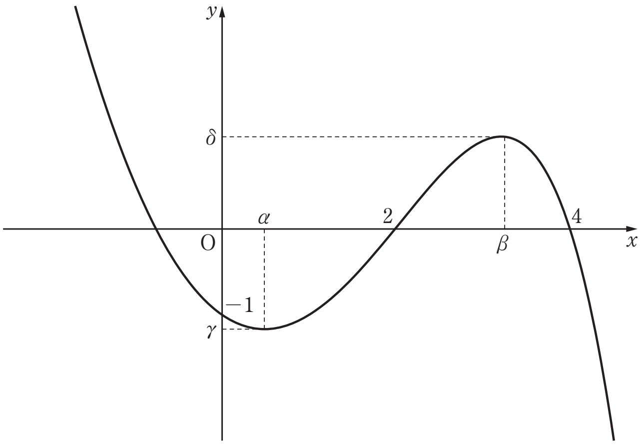
(2)　$f(x)=x^2-2^x$ とおくと $f'(x)=2x-(\log 2)2^x$，$f''(x)=2-(\log 2)^2 2^x$ である．
ここで $f''(x)$ は単調減少関数で $\lim_{x\to\infty} f''(x)=-\infty$，$\lim_{x\to-\infty} f''(x)=2$ より $f''(x)=0$ の実数解はただ１つだけ存在し，それを x_0 とおく．このとき $f'(x)$ の増減は

x	$-\infty$	$\cdots$	x_0	$\cdots$	∞
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$	$-\infty$	↗		↘	$-\infty$

であり，$f'(0)=-\log 2<0$，$f'(1)=2-2\log 2>0$，$f'(3)=6-8\log 2>0$，
$f'(4)=8-16\log 2<0$ より $f'(x)=0$ の実数解は $0<x<1$，$3<x<4$ の区間にそれぞれ１つずつ存在し，それらを小さい順に α，β とおくと $f(x)$ の増減は

x	$-\infty$	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	∞	↘	γ	↗	δ	↘	$-\infty$

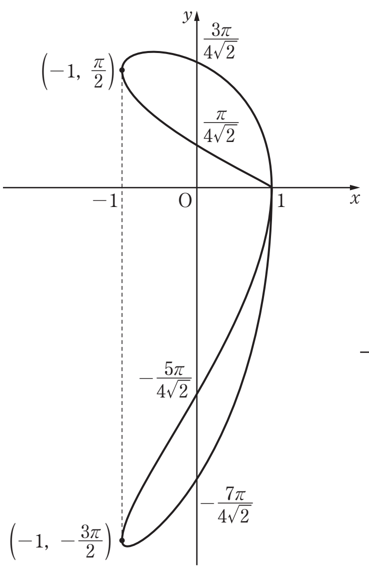
となるので，求めるグラフは下図．

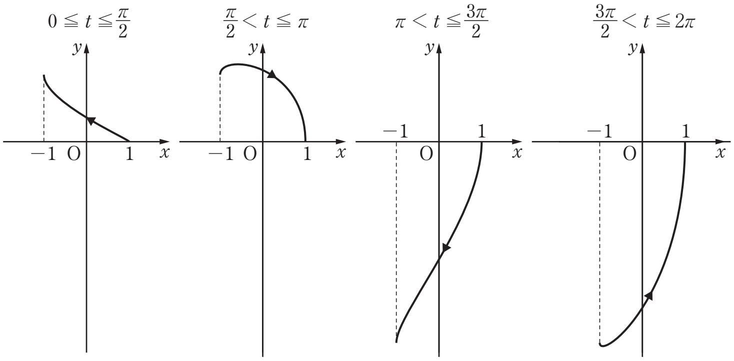


［B］　$\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)=(-2\sin 2t,\ \sin t+t\cos t)$ より増減は

t	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\cdots$	α	$\cdots$	π	$\cdots$	$\dfrac{3\pi}{2}$	$\cdots$	β	$\cdots$	2π
x'	(0)	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$	(0)
y'	(0)	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$(x,\ y)$	$(1,\ 0)$	↖	$\left(-1,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$	↗		↘	$(1,\ 0)$	↙	$\left(-1,\ -\dfrac{3\pi}{2}\right)$	↘		↗	$(1,\ 0)$

となる（ただし α と β は $\tan t+t=0$ $(0<\alpha<\beta<2\pi)$ を満たす実数）．
よって，$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{\sin t+t\cos t}{2\sin 2t}$ に注意すると，グラフは以下の通り．


y
$\frac{3\pi}{4\sqrt{2}}$
$\left(-1,\ \frac{\pi}{2}\right)$
$\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$
-1
O
1
x
$-\frac{5\pi}{4\sqrt{2}}$
$-\frac{7\pi}{4\sqrt{2}}$
$\left(-1,\ -\frac{3\pi}{2}\right)$


$0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2} < t \leqq \pi$
$\pi < t \leqq \frac{3\pi}{2}$
$\frac{3\pi}{2} < t \leqq 2\pi$
y
-1
O
1
x

第15講　ちょっと訳あり増減

15

［A］ 座標平面上の曲線 $x=\cos^3\theta$, $y=\sin^3\theta$ $\left(0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{4}\right)$ において，この曲線上の点 $(\cos^3\theta,\ \sin^3\theta)$ における法線（接線と接点で直交する直線）と x 軸との交点をP，この法線と直線 $y=x$ との交点をQとする．原点と点P，点Qで作られる三角形OPQの面積を $S(\theta)$ とする．$S(\theta)$ は $0<\theta<\dfrac{\pi}{6}$ で最大値をとる関数であることを示せ．

［B］ 平面上に二つの曲線

$$C：y=e^{2x}+1,$$
$$D：y=-x^2+14x-49$$

がある．

(1) C 上の点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における C の接線と D 上の点 $\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ における D の接線が平行であるとき，x_2 を x_1 で表せ．

(2) D 上の点Qを固定し，C 上の点Pを動かすときに，線分PQの長さは点 P_0 で最小になるとする．このとき C の P_0 での接線は，線分 $\mathrm{P}_0\mathrm{Q}$ と直交することを証明せよ．

(3) 点P，Qがそれぞれ C 上と D 上を動くとき，線分PQの長さの最小値を求めよ．

【答】 ［A］ 略

［B］ (1) $x_2=-e^{2x_1}+7$　(2) 略　(3) $3\sqrt{5}$

【解説】

［A］ $\dfrac{dx}{d\theta}=3\cos^2\theta(-\sin\theta)$, $\dfrac{dy}{d\theta}=3\sin^2\theta\cos\theta$ より

$$\left(\frac{dx}{d\theta},\ \frac{dy}{d\theta}\right)\mathbin{/\!/}(-\cos\theta,\ \sin\theta)$$

となるので，法線は

$$-\cos\theta(x-\cos^3\theta)+\sin\theta(y-\sin^3\theta)=0$$
$$\Longleftrightarrow\quad -\cos\theta\cdot x+\sin\theta\cdot y+\cos 2\theta=0$$

よって

$$\mathrm{P}\left(\frac{\cos 2\theta}{\cos\theta},\ 0\right),\ \mathrm{Q}(\sin\theta+\cos\theta,\ \sin\theta+\cos\theta)$$

ゆえに

$$\begin{aligned}S(\theta)&=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}\cdot\sin\frac{\pi}{4}\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos 2\theta}{\cos\theta}\cdot(\sin\theta+\cos\theta)\\&=\frac{1}{2}(\cos 2\theta\tan\theta+\cos 2\theta)\\&=\frac{1}{2}\{(2\cos^2\theta-1)\tan\theta+\cos 2\theta\}\\&=\frac{1}{2}(\sin 2\theta+\cos 2\theta-\tan\theta)\end{aligned}$$

よって

$$S'(\theta)=\frac{1}{2}\left(2\cos 2\theta-2\sin 2\theta-\frac{1}{\cos^2\theta}\right),$$

$$S''(\theta)=\frac{1}{2}\left(-4\sin 2\theta-4\cos 2\theta-2\cdot\frac{\sin\theta}{\cos^3\theta}\right)<0,$$

$$S'(0)=\frac{1}{2}>0,\ S'\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1+3\sqrt{3}}{6}<0$$

より $S'(\theta)=0$ を満たす実数解 θ は $0<\theta<\frac{\pi}{6}$ にただ1つだけ存在し，それを α とおくと

$S(\theta)$ の増減は

θ	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$
$S'(\theta)$		$+$	0	$-$		$-$	
$S(\theta)$		↗		↘		↘	

となるので，題意は示された.

［B］ (1)　$f(x)=e^{2x}+1$，$g(x)=-x^2+14x-49$ とおくと，

$f'(x)=2e^{2x}$，$g'(x)=-2x+14$ より

$$f'(x_1)=g'(x_2) \iff 2e^{2x_1}=-2x_2+14$$
$$\iff \boldsymbol{x_2=-e^{2x_1}+7}$$

(2)　$h(x)=(x-x_2)^2+\{f(x)-g(x_2)\}^2$ とおくと

$$h'(x)=2(x-x_2)+2\{f(x)-g(x_2)\}f'(x)$$
$$=2(x-x_2)+4\{e^{4x}+e^{2x}-g(x_2)e^{2x}\}$$
$$h''(x)=2[8e^{4x}+4\{1-g(x_2)\}e^{2x}+1]$$

ここで $g(x_2)=-(x_2-7)^2\leqq 0$ より $h''(x)>0$　よって $h'(x)=0$ となるただ1つの実数解 x を x_1 とおくと

$$h'(x_1)=0$$
$$\iff 2(x_1-x_2)+2\{f(x_1)-g(x_2)\}f'(x_1)=0$$
$$\iff -\frac{1}{f'(x_1)}=\frac{f(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}$$

よって題意は示された.

(3)　(1)，(2)より

$$\begin{cases} x_2=-e^{2x_1}+7 \\ h'(x_1)=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_2=-e^{2x_1}+7 \\ (x_1-x_2)+2e^{2x_1}\{e^{2x_1}+1+(x_2-7)^2\}=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_2=-e^{2x_1}+7 \quad \cdots\cdots ① \\ x_1+2e^{6x_1}+2e^{4x_1}+3e^{2x_1}-7=0 \quad \cdots\cdots ② \end{cases}$$

また(2)より②はただ1つの実数解をもち，それは $x_1=0$ であるので，①より

$x_2=-e^0+7=6$　よってPQが最小となるとき

$$\mathrm{P}(0,\ 2),\ \mathrm{Q}(6,\ -1)$$

となるので，その最小値は

$$\sqrt{6^2+(-3)^2}=\mathbf{3\sqrt{5}}$$

第 16 講　微分でやっておきたいこと

16

［A］ 以下において，$f(x)$ はすべての実数 x において微分可能な関数とし，
$F(x)=e^x f(x)$ とおく．

(1) 定数関数でない関数 $f(x)$ で条件(A)「すべての x に対して $f(x+1)=f(x)$ である」を満たすものの例をあげよ．

(2) 関数 $f(x)$ が条件(B)「すべての x に対して $f'(x)+f(x)\leqq 0$ である」を満たすとき，$a<b$ ならば $F(a)\geqq F(b)$ であることを示せ．

(3) 関数 $f(x)$ が(1)の条件(A)を満たすとき，$F(x+n)$（ただし，n は正の整数）を $F(x)$ を用いて表せ．

(4) 関数 $f(x)$ が(1)，(2)の条件(A)，(B)をともに満たすとする．

1．$f(c)\geqq 0$ となる c が存在すれば，$f(c)=0$ であることを示せ．

2．ある c で $f(c)=0$ であれば，すべての x で $f(x)=0$ であることを示せ．

［B］ $x>0$ において関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\frac{x^2+1}{2}\log\frac{x^2+1}{2}+\frac{1}{2}(x-1)^2-x^2\log x$$

で定める．対数は自然対数である．

(1) 導関数 $f'(x)$ が単調増加であることを示せ．

(2) $f(x)\geqq 0$ であることを示し，$f(x)=0$ となる x を求めよ．

(3) 正の実数 p，q について不等式

$$\frac{p^2+q^2}{2}\log\frac{p^2+q^2}{2}\geqq -\frac{1}{2}(p-q)^2+\frac{p^2\log p^2+q^2\log q^2}{2}$$

が成立することを示せ．

【答】 ［A］ (1) $f(x)=\sin 2\pi x$　(2) 略　(3) $F(x+n)=e^nF(x)$　(4) 略

［B］ (1) 略　(2) $x=1$　(3) 略

【解説】

［A］ (1) $\sin kx$ の基本周期 $\dfrac{2\pi}{|k|}$ が 1 となるように $k=2\pi$ とすると，

$$\boldsymbol{f(x)=\sin 2\pi x}$$

(2) $F'(x)=e^xf(x)+e^xf'(x)=e^x\{f(x)+f'(x)\}\leqq 0$

よって $F(x)$ は非増加関数であるので

$a<b$ のとき $F(a)\geqq F(b)$

(3)
$$\begin{aligned}F(x+n)&=e^{x+n}f(x+n)\\&=e^n\cdot e^xf(x)\\&=\boldsymbol{e^nF(x)}\end{aligned}$$

(4)　$f(c) \geqq 0$ とすると，(3)より $n \geqq 1$ の場合に

$$F(n+c) \leqq F(c) \iff e^{n+c}f(c) \leqq e^{c}f(c)$$
$$\iff e^{c}(e^{n}-1)f(c) \leqq 0$$

ここで $e^{n}-1>0$ より $f(c) \leqq 0$　よって

$$f(c)=0$$

またある c について $f(c)=0$ のとき任意の x に対し

$$c+n \leqq x < c+n+1$$

となる n が存在するが，(3)の結果の x に $x-n$ を代入することで，

$$F(x)=e^{n}F(x-n) \qquad \therefore \quad F(x-n)=e^{-n}F(x)$$

となり，また $F(x+n)=e^{n}F(x)$ は $n=0$ のときにも成り立つので，$F(x+n)=e^{n}F(x)$ は任意の整数 n の場合に成り立つ．よって

$$F(c+n) \geqq F(x) \geqq F(c+n+1)$$
$$\iff e^{c+n}f(c) \geqq e^{x}f(x) \geqq e^{c+n+1}f(c)$$
$$\therefore \quad e^{x}f(x)=0$$

ゆえに

$$f(x)=0$$

［B］ (1)　題意の $f(x)$ を微分すると

$$f'(x)=x\log\frac{x^2+1}{2}+\frac{x^2+1}{2}\cdot\frac{2}{x^2+1}\cdot x+(x-1)-2x\log x-x^2\cdot\frac{1}{x}$$

$$=x\log\frac{x^2+1}{2}-2x\log x+x-1$$

$$f''(x)=\log\frac{x^2+1}{2}+x\cdot\frac{2}{x^2+1}\cdot x-2\log x-2x\cdot\frac{1}{x}+1$$

$$=\log\frac{x^2+1}{2}-2\log x-\frac{2}{x^2+1}+1$$

$$f'''(x)=\frac{2x}{x^2+1}-\frac{2}{x}+\frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{2(x-1)(x+1)}{x(x^2+1)^2}$$

よって $f''(x)$ の増減は

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'''(x)$		$-$	0	$+$
$f''(x)$		↘	0	↗

となり $f''(x)\geqq 0$ より $f'(x)$ は単調増加である.

(2)　$f'(1)=0$ より $f(x)$ の増減は

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	0	↗

となるので $f(x)\geqq 0$　等号成立は $\boldsymbol{x=1}$ のとき.

(3)　(2)より正の実数 p, q に対して $q^2f\left(\dfrac{p}{q}\right)\geqq 0$ が成り立つ.

$$q^2f\left(\frac{p}{q}\right)\geqq 0$$

$$\iff \frac{p^2+q^2}{2}\log\frac{p^2+q^2}{2q^2}+\frac{1}{2}(p-q)^2-p^2\log\frac{p}{q}\geqq 0$$

$$\iff \frac{p^2+q^2}{2}\log\frac{p^2+q^2}{2}+\frac{1}{2}(p-q)^2-\frac{p^2+q^2}{2}\log q^2-p^2\log\frac{p}{q}\geqq 0$$

$$\iff \frac{p^2+q^2}{2}\log\frac{p^2+q^2}{2}\geqq -\frac{1}{2}(p-q)^2+\frac{p^2\log p^2+q^2\log q^2}{2}$$

(等号は $\dfrac{p}{q}=1$ つまり $p=q$ のとき成立)

第17講　落とせない積分計算

17

［A］ 次の定積分を計算せよ．ただし，m，n は正の整数である．

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^5 x\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^4 x\,dx$

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos^3 x}dx$

(4) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin mx \sin nx\,dx$

［B］ 次の定積分を計算せよ．

$$\int_0^1 \frac{1}{x^6+1}dx$$

【答】 ［A］ (1) $\dfrac{1}{24}$　(2) $\dfrac{\pi}{32}$　(3) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}\log 3$　(4) $\begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & (m=n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}$

［B］ $\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\sqrt{3}}{6}\log(2+\sqrt{3})$

【解説】

［A］ (1)

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^5 x\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^7 x - \cos^5 x)(-\sin x)dx \\ &= \left[\frac{1}{8}\cos^8 x - \frac{1}{6}\cos^6 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \mathbf{\frac{1}{24}}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^4 x\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{16}(1-\cos 4x + 2\sin^2 2x \cos 2x)dx \\ &= \frac{1}{16}\left[x - \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{3}\sin^3 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \boldsymbol{\frac{\pi}{32}}\end{aligned}$$

(3)　$\sin x=t$ と置換積分することにより

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\cos^3 x}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{(1-t^2)^2}dt$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{(1-t)^2}+\frac{1}{(1+t)^2}+\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)dt$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{2t}{1-t^2}+\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$=\mathbf{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\log 3}$$

(4)　$m=n$ のとき

$$\sin mx\sin nx=\sin^2 mx$$

$$=\frac{1}{2}(1-\cos 2mx)$$

よって

$$\int_0^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx=\left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{4m}\sin 2mx\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{\pi}{2}$$

$m\neq n$ のとき

$$\sin mx\sin nx=\frac{1}{2}\{-\cos(m+n)x+\cos(m-n)x\}$$

より

$$\int_0^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{m+n}\sin(m+n)x+\frac{1}{m-n}\sin(m-n)x\right]_0^{\pi}$$

$$=0$$

以上より　$$\int_0^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx=\begin{cases}\boldsymbol{\dfrac{\pi}{2}} & \boldsymbol{(m=n)}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{(m\neq n)}\end{cases}$$

［B］

$$\frac{1}{x^6+1}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x^2+1}-\frac{x^2-2}{x^4-x^2+1}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x^2+1}-\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}x-1}{x^2-\sqrt{3}x+1}-\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}x-1}{x^2+\sqrt{3}x+1}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\frac{1}{x^2+1}-\frac{\sqrt{3}}{12}\frac{2x-\sqrt{3}}{x^2-\sqrt{3}x+1}+\frac{1}{12}\frac{1}{\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}$$

$$+\frac{\sqrt{3}}{12}\frac{2x+\sqrt{3}}{x^2+\sqrt{3}x+1}+\frac{1}{12}\frac{1}{\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}$$

であり，$x=\tan\theta$，$x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{2}\tan\theta$，$x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{2}\tan\theta$ と置換積分することで順に

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4},$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}dx=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{12}}2d\theta=\Big[2\theta\Big]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{12}}=\frac{5}{6}\pi,$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5}{12}\pi}2d\theta=\Big[2\theta\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5}{12}\pi}=\frac{\pi}{6}$$

となり，また

$$\int_0^1\left(-\frac{\sqrt{3}}{12}\frac{2x-\sqrt{3}}{x^2-\sqrt{3}\,x+1}+\frac{\sqrt{3}}{12}\frac{2x+\sqrt{3}}{x^2+\sqrt{3}\,x+1}\right)dx=\left[-\frac{\sqrt{3}}{12}\log\frac{x^2-\sqrt{3}\,x+1}{x^2+\sqrt{3}\,x+1}\right]_0^1$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{6}\log(2+\sqrt{3})$$

となるので，$\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x^6+1}dx=\boldsymbol{\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{6}\log(2+\sqrt{3})}$

第 18 講　積分と漸化式

18

［A］ 次の定積分を計算せよ．ただし，α と β は $\alpha<\beta$ を満たす定数，m と n は自然数とする．

$$I(m,\ n)=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^m(x-\beta)^n dx$$

［B］ $n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ に対して

$$S_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x x^n \sin x\, dx$$

$$C_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x x^n \cos x\, dx$$

とおく．ただし，e は自然対数の底である．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) S_0，C_0 の値をそれぞれ求めよ．

(2) $n\geqq 1$ のとき，S_n を S_{n-1}，C_{n-1} を用いて，また，C_n を S_{n-1}，C_{n-1} を用いてそれぞれ表せ．

(3) $f(x)=\int_0^x t(\sin t-\cos t)dt+\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^t f(t)dt$ を満たす $f(x)$ を求めよ．

【答】 ［A］ $\dfrac{(-1)^n m!n!(\beta-\alpha)^{m+n+1}}{(m+n+1)!}$

［B］ (1) $S_0=\dfrac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}}+1\right)$，$C_0=\dfrac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}}-1\right)$

(2) $\begin{cases} S_n=\dfrac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^n-\dfrac{n}{2}(S_{n-1}-C_{n-1}) \\ C_n=\dfrac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^n-\dfrac{n}{2}(S_{n-1}+C_{n-1}) \end{cases}$

(3) $f(x)=\sin x-x\sin x-\cos x-x\cos x+\dfrac{(\pi-1)e^{\frac{\pi}{2}}-5}{2(e^{\frac{\pi}{2}}-2)}$

【解説】

［A］

$$I(m,\ n)=\left[\frac{1}{m+1}(x-\alpha)^{m+1}(x-\beta)^n\right]_{\alpha}^{\beta}-\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{m+1}(x-\alpha)^{m+1}\cdot n(x-\beta)^{n-1}dx$$

$$=-\frac{n}{m+1}I(m+1,\ n-1)$$

となる．以下同様に

$$\begin{aligned} I(m,\ n)&=-\frac{n}{m+1}I(m+1,\ n-1) \\ &=-\frac{n}{m+1}\left(-\frac{n-1}{m+2}\right)I(m+2,\ n-2) \\ &=-\frac{n}{m+1}\left(-\frac{n-1}{m+2}\right)\left(-\frac{n-2}{m+3}\right)I(m+3,\ n-3) \\ &=\cdots\cdots \\ &=-\frac{n}{m+1}\left(-\frac{n-1}{m+2}\right)\left(-\frac{n-2}{m+3}\right)\cdots\cdots\left(-\frac{2}{m+n-1}\right)I(m+n-1,\ 1) \end{aligned}$$

となる．ここで

$$I(m+n-1,\ 1)=\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^{m+n-1}(x-\beta)dx$$

$$=\left[\frac{1}{m+n}(x-\alpha)^{m+n}(x-\beta)\right]_\alpha^\beta-\int_\alpha^\beta \frac{1}{m+n}(x-\alpha)^{m+n}dx$$

$$=-\left[\frac{1}{(m+n)(m+n+1)}(x-\alpha)^{m+n+1}\right]_\alpha^\beta$$

$$=-\frac{(\beta-\alpha)^{m+n+1}}{(m+n)(m+n+1)}$$

となるので

$$I(m,\ n)=-\frac{n}{m+1}\left(-\frac{n-1}{m+2}\right)\left(-\frac{n-2}{m+3}\right)\cdots\cdots\left(-\frac{2}{m+n-1}\right)\left\{-\frac{(\beta-\alpha)^{m+n+1}}{(m+n)(m+n+1)}\right\}$$

$$=\frac{(-1)^n n!(\beta-\alpha)^{m+n+1}}{(m+1)(m+2)(m+3)\cdots(m+n)(m+n+1)}$$

$$=\boldsymbol{\frac{(-1)^n m!n!(\beta-\alpha)^{m+n+1}}{(m+n+1)!}}$$

［B］ (1)

$$S_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\,dx$$

$$=\left[\frac{e^x}{2}(\sin x-\cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}}+1\right)}$$

$$C_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\,dx$$

$$=\left[\frac{e^x}{2}(\sin x+\cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}}-1\right)}$$

(2)

$$S_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x x^n \sin x\,dx$$

$$=\left[\frac{e^x}{2}(\sin x-\cos x)x^n\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{n}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x x^{n-1}(\sin x-\cos x)dx$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}\right)^n-\frac{n}{2}(S_{n-1}-C_{n-1})}$$

$$C_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x x^n \cos x\,dx$$

$$=\left[\frac{e^x}{2}(\sin x+\cos x)x^n\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{n}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x x^{n-1}(\sin x+\cos x)dx$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}\right)^n-\frac{n}{2}(S_{n-1}+C_{n-1})}$$

(3)　(2)より

$$S_1=\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}\right)^1-\frac{1}{2}(S_0-C_0)=\frac{1}{4}(e^{\frac{\pi}{2}}\pi-2)$$

$$C_1=\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}\right)^1-\frac{1}{2}(S_0+C_0)=\frac{1}{4}e^{\frac{\pi}{2}}(\pi-2)$$

である.

$$\begin{aligned}&\int_0^x t(\sin t-\cos t)dt\\&=\Big[-t(\sin t+\cos t)+\sin t-\cos t\Big]_0^x\\&=-x(\sin x+\cos x)+(\sin x-\cos x)+1\end{aligned}$$

$k=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^tf(t)dt$ とおくと

$$f(x)=-x(\sin x+\cos x)+(\sin x-\cos x)+1+k$$

よって

$$\begin{aligned}k&=-S_1-C_1+S_0-C_0+\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+k)e^tdt\\&=\frac{1}{2}(-e^{\frac{\pi}{2}}\pi+e^{\frac{\pi}{2}}+3)+(1+k)(e^{\frac{\pi}{2}}-1)\end{aligned}$$

$$\therefore\quad k=\frac{e^{\frac{\pi}{2}}\pi-3e^{\frac{\pi}{2}}-1}{2(e^{\frac{\pi}{2}}-2)}$$

ゆえに

$$f(x)=\boldsymbol{-x(\sin x+\cos x)+(\sin x-\cos x)+\frac{e^{\frac{\pi}{2}}\pi-e^{\frac{\pi}{2}}-5}{2(e^{\frac{\pi}{2}}-2)}}$$

第19講　実数解条件と体積

19

［A］　a を $0<a<\dfrac{1}{4}$ を満たす実数とする．xy 平面で，不等式

$$y^2 \leqq x^2(1-x^2)-a$$

の表す領域を y 軸のまわりに１回転してできる回転体の体積を求めよ．

［B］　座標空間において，平面 $z=\sqrt{2}$ 上にある半径 $\sqrt{2}$，中心 $(0,\ 0,\ \sqrt{2})$ の円を C_1，平面 $z=-\sqrt{2}$ 上にある半径 $\sqrt{2}$，中心 $(0,\ 0,\ -\sqrt{2})$ の円を C_2 とする．また，空間内の点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ に対し，円 C_1 上を動く点Qと P の距離の最小値を m，円 C_2 上を動く点 R と P の距離の最大値を M とする．次の問いに答えよ．

(1)　$r=\sqrt{x^2+y^2}$ とおくとき，m と M を r および z で表せ．

(2)　$|M-2\sqrt{6}|\geqq m$ という条件を満たす点 P の範囲を H とする．図形 H の体積を求めよ．

【答】［A］　$\dfrac{\pi^2}{4}(1-4a)$

［B］(1) $m=\sqrt{(r-\sqrt{2})^2+(z-\sqrt{2})^2}$，$M=\sqrt{(r+\sqrt{2})^2+(z+\sqrt{2})^2}$　(2) $\dfrac{16\sqrt{3}}{3}\pi$

【解説】

［A］

$$\begin{aligned} & y^2 \leqq x^2(1-x^2)-a \\ \iff & x^4-x^2+y^2+a \leqq 0 \\ \iff & \left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2 \leqq \frac{1}{4}-a-y^2 \end{aligned}$$

この x が実数解をもつ条件は

$$\frac{1}{4}-a-y^2 \geqq 0 \qquad \therefore\quad -\sqrt{\frac{1}{4}-a} \leqq y \leqq \sqrt{\frac{1}{4}-a}$$

となるが，この条件のもとで，$\sqrt{\dfrac{1}{4}-a-y^2}<\dfrac{1}{2}$ に注意すると

$$\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-a-y^2} \leqq x^2 \leqq \frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-a-y^2}$$

と解くことができる．ここで $\sqrt{\dfrac{1}{4}-a}=\alpha$ とおくと，求める体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \int_{-\alpha}^{\alpha} \pi\left\{\left(\frac{1}{2}+\sqrt{\alpha^2-y^2}\right)-\left(\frac{1}{2}-\sqrt{\alpha^2-y^2}\right)\right\}dy \\ &= 2\pi\int_{-\alpha}^{\alpha}\sqrt{\alpha^2-y^2}\,dy \end{aligned}$$

$\displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha}\sqrt{\alpha^2-y^2}\,dy$ は半径 α の円の面積の $\dfrac{1}{2}$ を表すので

$$\begin{aligned} V &= 2\pi\cdot\pi\alpha^2\times\frac{1}{2} \\ &= \alpha^2\pi^2=\left(\frac{1}{4}-a\right)\pi^2=\boldsymbol{\frac{\pi^2}{4}(1-4a)} \end{aligned}$$

［B］ (1)　H_1，H_2 を

$$H_1(x,\ y,\ \sqrt{2}),\ H_2(x,\ y,\ -\sqrt{2})$$

とおくと，H_1，H_2 はそれぞれ P から 2 つの平面 $z=\sqrt{2}$，$z=-\sqrt{2}$ に下ろした垂線の足である．ここで $C_1(0,\ 0,\ \sqrt{2})$，$C_2(0,\ 0,\ -\sqrt{2})$ とすると $C_1H_1=C_2H_2=r$ より，Q と H_1 との最小値は $|r-\sqrt{2}|$ であるので三平方の定理より

$$m^2=|r-\sqrt{2}|^2+|z-\sqrt{2}|^2$$

$$\therefore\ \ \boldsymbol{m=\sqrt{(r-\sqrt{2})^2+(z-\sqrt{2})^2}}$$

同様に R と H_2 の最大値は $r+\sqrt{2}$ であるので

$$M^2=(r+\sqrt{2})^2+|z-(-\sqrt{2})|^2$$

$$\therefore\ \ \boldsymbol{M=\sqrt{(r+\sqrt{2})^2+(z+\sqrt{2})^2}}$$

(2)

$$|M-2\sqrt{6}|\geqq m$$

$$\iff |M-2\sqrt{6}|^2\geqq m^2$$

$$\iff M^2-4\sqrt{6}M+24\geqq m^2$$

$$\iff M^2-m^2+24\geqq 4\sqrt{6}M$$

$$\iff 4\sqrt{2}(z+r+3\sqrt{2})\geqq 4\sqrt{6}M$$

$$\iff (z+r+3\sqrt{2})^2\geqq 3M^2 \text{ かつ } z+r+3\sqrt{2}\geqq 0$$

$$\iff \begin{cases} z^2+r^2-rz-3\leqq 0 & \cdots\cdots① \\ z+r+3\sqrt{2}\geqq 0 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

ここで① $\iff r^2-zr+z^2-3\leqq 0$ より，この r に関する不等式は $-2\leqq z\leqq 2$ のときに実数解 $\dfrac{z-\sqrt{3(4-z^2)}}{2}\leqq r\leqq\dfrac{z+\sqrt{3(4-z^2)}}{2}$ をもつが，$r=\sqrt{x^2+y^2}\geqq 0$ であることと，

$-2\leqq z<-\sqrt{3}$ のとき $\dfrac{z+\sqrt{3(4-z^2)}}{2}<0$，$-\sqrt{3}\leqq z\leqq 2$ のとき $\dfrac{z+\sqrt{3(4-z^2)}}{2}\geqq 0$ となり，$-2\leqq z<\sqrt{3}$ のとき $\dfrac{z-\sqrt{3(4-z^2)}}{2}<0$，$\sqrt{3}\leqq z\leqq 2$ のとき $\dfrac{z-\sqrt{3(4-z^2)}}{2}\geqq 0$

より，不等式①は

$|z|\leqq\sqrt{3}$ のとき

$$0\leqq r\leqq\frac{z+\sqrt{3(4-z^2)}}{2}$$

$\sqrt{3}<z\leqq 2$ のとき

$$\frac{z-\sqrt{3(4-z^2)}}{2}\leqq r\leqq\frac{z+\sqrt{3(4-z^2)}}{2}$$

であるので，求める体積は

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\pi\left(\frac{z+\sqrt{3(4-z^2)}}{2}\right)^2dz$$

$$+\int_{\sqrt{3}}^{2}\pi\left\{\left(\frac{z+\sqrt{3(4-z^2)}}{2}\right)^2-\left(\frac{z-\sqrt{3(4-z^2)}}{2}\right)^2\right\}dz$$

$$=\pi\left\{\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left(3-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{2}z\sqrt{12-3z^2}\right)dz+\int_{\sqrt{3}}^{2}z\sqrt{12-3z^2}\,dz\right\}$$

$$=\pi\left\{\int_{0}^{\sqrt{3}}(6-z^2)dz+\int_{\sqrt{3}}^{2}z\sqrt{12-3z^2}\,dz\right\}$$

$$=\pi\left\{\left[6z-\frac{1}{3}z^3\right]_0^{\sqrt{3}}+\left[-\frac{1}{9}(12-3z^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{\sqrt{3}}^{2}\right\}$$

$$=\boldsymbol{\frac{16\sqrt{3}}{3}\pi}$$

第20講　斜回転体の体積

20

［A］　直線 $l: y=mx\ (m>0)$ と曲線 $C: y=x^2$ によって囲まれる部分を D とする．D を l を軸に回転してできる立体の体積 V を求めよ．

［B］　直線 $l_1: y=x$ と $l_2: y=-x+\pi$ と曲線 $C: y=\sin x\ (0\leqq x\leqq\pi)$ によって囲まれる部分を D とする．D を l_1 を軸に回転してできる立体の体積 V を求めよ．

【答】［A］　$\dfrac{m^5}{30\sqrt{1+m^2}}\pi$

［B］　$\dfrac{\sqrt{2}\,\pi^2(\pi^2-9)}{12}$

【解説】

［A］　原点以外の l と C の交点を A とすると，$\mathrm{A}(m,\ m^2)$ である．このとき，線分 OA 上の点 P を考え，$\mathrm{OP}=s$ とする．点 P を通り，l に垂直な直線と C の $x\geqq0$ の部分との交点を Q とすると，求める体積は，$\mathrm{OA}=m\sqrt{1+m^2}$ より

$$V=\int_0^{m\sqrt{1+m^2}}\pi\mathrm{PQ}^2\,ds$$

により求めることができる．

ここで，Q の x 座標を t として，l 上の点 R を QR が y 軸と平行になるように定めると $\mathrm{Q}(t,\ t^2)$，$\mathrm{R}(t,\ mt)$ となる．ここで $m=\tan\theta$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，

$$\mathrm{OR}=\frac{t}{\cos\theta},\quad \mathrm{PR}=\mathrm{RQ}\sin\theta$$

より $\mathrm{OP}=\mathrm{OR}-\mathrm{PR}$ つまり $s=\dfrac{t}{\cos\theta}-(mt-t^2)\sin\theta$ を得る．

このとき $ds=\left\{\dfrac{1}{\cos\theta}-(m-2t)\sin\theta\right\}dt$ である．

また，$\mathrm{PQ}=\mathrm{RQ}\cos\theta$ より

$$\mathrm{PQ}=(mt-t^2)\cos\theta$$

となる．

ここで，$\mathrm{OP}=s$ を 0 から $\mathrm{OA}=m\sqrt{1+m^2}$ まで動かしたとき，t は 0 から m まで変化するので

$$\begin{aligned}V&=\int_0^{m\sqrt{1+m^2}}\pi\mathrm{PQ}^2\,ds\\&=\int_0^m\pi(mt-t^2)^2\cos^2\theta\cdot\left\{\frac{1}{\cos\theta}-(m-2t)\sin\theta\right\}dt\\&=\pi\int_0^m\{\cos\theta\cdot(m^2t^2-2mt^3+t^4)-\sin\theta\cos^2\theta\cdot(mt-t^2)^2(m-2t)\}dt\\&=\pi\left[\cos\theta\cdot\left(\frac{m^2}{3}t^3-\frac{m}{2}t^4+\frac{1}{5}t^5\right)-\frac{\sin\theta\cos^2\theta}{3}(mt-t^2)^3\right]_0^m\end{aligned}$$

$$=\frac{m^5\cos\theta}{30}\pi$$

$$=\boldsymbol{\frac{m^5}{30\sqrt{1+m^2}}\pi}$$

［B］ l_1 と l_2 の交点を A とすると，$\mathrm{A}\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ である．このとき，線分 OA 上の点 P を考え，OP$=s$ とする．点 P を通り，l_1 に垂直な直線と C との交点を Q とすると，求める体積は，$\mathrm{OA}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ より

$$V=\int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{2}}}\pi\mathrm{PQ}^2ds$$

により求めることができる．

ここで，Q の x 座標を t として，l_1 上の点 R を QR が y 軸と平行になるように定めると $\mathrm{Q}(t,\ \sin t)$，$\mathrm{R}(t,\ t)$ となり

$$\mathrm{OR}=\sqrt{2}\,t,\ \ \mathrm{PR}=\frac{\mathrm{RQ}}{\sqrt{2}}$$

より OP＝OR－PR つまり $s=\sqrt{2}\,t-\frac{t-\sin t}{\sqrt{2}}$ を得る．

このとき $ds=\left(\sqrt{2}-\frac{1-\cos t}{\sqrt{2}}\right)dt$ である．

また，$\mathrm{PQ}=\frac{\mathrm{RQ}}{\sqrt{2}}$ より

$$\mathrm{PQ}=\frac{t-\sin t}{\sqrt{2}}$$

となる．

ここで，OP$=s$ を 0 から $\mathrm{OA}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ まで動かしたとき，t は 0 から π まで変化するので

$$V=\int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{2}}}\pi\mathrm{PQ}^2ds$$

$$=\int_0^{\pi}\pi\left(\frac{t-\sin t}{\sqrt{2}}\right)^2\cdot\left(\sqrt{2}-\frac{1-\cos t}{\sqrt{2}}\right)dt$$

$$=\pi\int_0^{\pi}\left\{\frac{t^2-2t\sin t+\frac{1-\cos 2t}{2}}{\sqrt{2}}-\left(\frac{t-\sin t}{\sqrt{2}}\right)^2\frac{1-\cos t}{\sqrt{2}}\right\}dt$$

$$=\pi\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\frac{t^3}{3}-2(-t\cos t+\sin t)+\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\right\}-\frac{1}{3}\left(\frac{t-\sin t}{\sqrt{2}}\right)^3\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{\pi^2(\pi^2-9)}{6\sqrt{2}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}\,\pi^2(\pi^2-9)}{12}}$$

第21講　体積は切る！

21

［A］ xyz 空間内に2つの立体 K, L がある．どのような a に対しても，平面 $z=a$ による立体 K の切り口は3点 $(0,\ 0,\ a)$, $(1,\ 0,\ a)$, $\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ a\right)$ を頂点とする正三角形である．また，どのような a に対しても，平面 $y=a$ による立体 L の切り口は3点 $(0,\ a,\ 0)$, $\left(0,\ a,\ \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(1,\ a,\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ を頂点とする正三角形である．このとき，立体 K と L の共通部分の体積を求めよ．

［B］ 立体 $K：x^2+y^2+z^2\leqq 4$ と立体 $L：(x-1)^2+y^2\leqq 1$ の共通部分の立体の体積 V を求めよ．

【答】［A］ $\frac{1}{4}$

［B］ $\frac{16(3\pi-4)}{9}$

【解説】

［A］ 2つの立体 K, L はそれぞれ

$$K：\begin{cases} 0\leqq y\leqq\sqrt{3}\,x & \left(0\leqq x\leqq\frac{1}{2}\right) \\ 0\leqq y\leqq\sqrt{3}\,(1-x) & \left(\frac{1}{2}<x\leqq 1\right)\end{cases}$$

$$L：\frac{1}{\sqrt{3}}x\leqq z\leqq\frac{1}{\sqrt{3}}(2-x)\quad (0\leqq x\leqq 1)$$

と表せる．立体 K と L の共通部分を平面 $x=t$ で切った切り口は

(Ⅰ) $0\leqq t\leqq\frac{1}{2}$ のとき

$$0\leqq y\leqq\sqrt{3}\,t \text{ かつ } \frac{1}{\sqrt{3}}t\leqq z\leqq\frac{1}{\sqrt{3}}(2-t)$$

(Ⅱ) $\frac{1}{2}<t\leqq 1$ のとき

$$0\leqq y\leqq\sqrt{3}\,(1-t) \text{ かつ } \frac{1}{\sqrt{3}}t\leqq z\leqq\frac{1}{\sqrt{3}}(2-t)$$

といずれの場合も長方形となるので求める体積は

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{3}\,t\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}(1-t)dt+\int_{\frac{1}{2}}^1\sqrt{3}\,(1-t)\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}(1-t)dt$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}2t(1-t)dt+\int_{\frac{1}{2}}^1 2(1-t)^2dt$$

$$=\left[t^2-\frac{2}{3}t^3\right]_0^{\frac{1}{2}}+\left[-\frac{2}{3}(1-t)^3\right]_{\frac{1}{2}}^1$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{4}}$$

［B］ 題意の共通部分の立体を平面 $x=t$ で切ると

$$t^2+y^2+z^2\leqq 4 \text{ かつ } (t-1)^2+y^2\leqq 1 \iff y^2+z^2\leqq 4-t^2 \text{ かつ } y^2\leqq 2t-t^2$$

となるが，これは $4-t^2\geqq 0$ かつ $2t-t^2\geqq 0$，つまり $0\leqq t\leqq 2$ という条件のもとで

$$y^2+z^2\leqq 4-t^2 \text{ かつ } -\sqrt{2t-t^2}\leqq y\leqq \sqrt{2t-t^2}$$

と変形でき，これらを満たす領域の面積 S を考える．

このとき，$\mathrm{P}(t,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{Q}(t,\ \sqrt{2t-t^2},\ \sqrt{4-2t})$，$\mathrm{R}(t,\ 0,\ \sqrt{4-t^2})$，$\mathrm{H}(t,\ \sqrt{2t-t^2},\ 0)$ として，$\angle\mathrm{QPR}=\theta$ とおき，対称性を利用すると面積 S は，扇形 PQR の面積と三角形 PQH の面積の和を 4 倍したものであるので

$$S=4\left\{\frac{1}{2}(\sqrt{4-t^2})^2\theta+\frac{1}{2}\sqrt{2t-t^2}\sqrt{4-2t}\right\}$$

となる．よって求める体積 V は

$$\begin{aligned}V&=\int_0^2 4\left\{\frac{1}{2}(\sqrt{4-t^2})^2\theta+\frac{1}{2}\sqrt{2t-t^2}\sqrt{4-2t}\right\}dt\\&=\int_0^2 2(4-t^2)\theta\,dt+\int_0^2 2\sqrt{2}\sqrt{t}\,(2-t)dt\end{aligned}$$

となるが，

$$\begin{aligned}\int_0^2 2\sqrt{2}\sqrt{t}\,(2-t)dt&=2\sqrt{2}\int_0^2\left(2t^{\frac{1}{2}}-t^{\frac{3}{2}}\right)dt\\&=2\sqrt{2}\left[\frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}\right]_0^2=\frac{64}{15}\end{aligned}$$

であり，$\tan\theta=\sqrt{\dfrac{t}{2}}$ つまり $t=2\tan^2\theta$ より $dt=4\tan\theta\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$ であることと，t が 0 から 2 まで変化するとき θ は 0 から $\dfrac{\pi}{4}$ まで変化することなどより

$$\begin{aligned}\int_0^2 2(4-t^2)\theta\,dt&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}2(4-4\tan^4\theta)\theta\cdot 4\tan\theta\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}32(\tan\theta-\tan^5\theta)\frac{1}{\cos^2\theta}\theta\,d\theta\\&=32\left\{\left[\left(\frac{1}{2}\tan^2\theta-\frac{1}{6}\tan^6\theta\right)\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{2}\tan^2\theta-\frac{1}{6}\tan^6\theta\right)d\theta\right\}\\&=32\left\{\frac{\pi}{12}-\frac{1}{6}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(3\tan^2\theta-\tan^6\theta)d\theta\right\}\end{aligned}$$

となる．

ここで，0 以上の整数 n に対して $I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n\theta\,d\theta$ とおくと

$$I_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n\theta\left(\frac{1}{\cos^2\theta}-1\right)d\theta=\left[\frac{1}{n+1}\tan^{n+1}\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n\theta\,d\theta=\frac{1}{n+1}-I_n$$

が成り立つので

$$3I_2-I_6=3I_2-\left(\frac{1}{5}-I_4\right)=3I_2-\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}+I_2\right)=2I_2+\frac{2}{15}=2(1-I_0)+\frac{2}{15}=\frac{32}{15}-2I_0$$

となり，$I_0=\int_0^{\frac{\pi}{4}}1d\theta=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$ となるので $\int_0^{\frac{\pi}{4}}(3\tan^2\theta-\tan^6\theta)d\theta=\frac{32}{15}-\frac{\pi}{2}$

よって

$$V=32\left\{\frac{\pi}{12}-\frac{1}{6}\left(\frac{32}{15}-\frac{\pi}{2}\right)\right\}+\frac{64}{15}=\boldsymbol{\frac{16(3\pi-4)}{9}}$$

第 22 講　微分方程式

22

［A］ 次の各問いに答えよ．

(1) $y'-xy=x$ を満たす関数を求めよ．ただし $x=0$ のとき $y=0$ であるとする．

(2) $y'+3x^2y=3x^5$ を満たす関数を求めよ．ただし $x=0$ のとき $y=0$ であるとする．

(3) 室温が摂氏 T_0 度の部屋にビーカーがおかれていて，そのビーカーの中にある液体が入っている．時刻 t におけるその液体の温度が摂氏 T 度であり，$t=0$ のとき $T=2T_0$ であった．温度 T の時間変化，つまり $\dfrac{dT}{dt}$ は，液体の温度 T と室温 T_0 との差に比例しているとして，その比例定数を $-k$ としたとき，T を t の式で表せ．ただし，部屋は十分に大きく，室温は常に一定であるものとする．

［B］ 関数 $f(x)$ は微分可能で $f'(x)$ は連続とし，$f(x)$ は関係式

$$f(x)+\int_0^x f(t)dt=\sin x$$

を満たしているとする．次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ と $f'(x)$ との間に成り立つ関係式を求めよ．

(2) $\dfrac{d}{dx}\{e^x f(x)\}$ を指数関数と三角関数で表せ．

(3) $\displaystyle\int_0^x e^t(\sin t+\cos t)dt=\int_0^x e^t(\sin t-\cos t)dt+e^x(\sin x+\cos x)-1$ を示せ．

(4) $\displaystyle\int_0^x e^t\cos t\,dt$ を求めよ．

(5) $f(x)$ を求めよ．

【答】 ［A］ (1) $y=e^{\frac{x^2}{2}}-1$ (2) $y=e^{-x^3}+x^3-1$ (3) $T=T_0(1+e^{-kt})$

［B］ (1) $f'(x)+f(x)=\cos x$ (2) $e^x\cos x$ (3) 略 (4) $\dfrac{1}{2}\{e^x(\sin x+\cos x)-1\}$

(5) $f(x)=\dfrac{1}{2}(\sin x+\cos x-e^{-x})$

【解説】

［A］ (1) 与式は $\dfrac{dy}{dx}=x(y+1)$ つまり $y+1\neq0$ より $\dfrac{1}{y+1}dy=x\,dx$ とできるので，積分定数を C とすると

$$\log|y+1|=\frac{x^2}{2}+C \qquad \therefore\quad y+1=\pm e^{\frac{x^2}{2}+C}$$

を得る．このとき $\pm e^C$ を定数 D で置き換えると $y=De^{\frac{x^2}{2}}-1$ と表せる．

ここで，$x=0$ のとき $y=0$ なので $0=De^0-1$ より $D=1$

よって $\boldsymbol{y=e^{\frac{x^2}{2}}-1}$

(2) 与式は $e^{x^3}y'+3x^2e^{x^3}y=3x^5e^{x^3}$ つまり $(e^{x^3}y)'=3x^5e^{x^3}$ とできる．

ここで

$$\{(x^3-1)e^{x^3}\}'=3x^2e^{x^3}+(x^3-1)\cdot3x^2e^{x^3}=3x^5e^{x^3}$$

なので積分定数 C を用いて

$$e^{x^3}y=(x^3-1)e^{x^3}+C \qquad \therefore \quad y=x^3-1+Ce^{-x^3}$$

ここで，$x=0$ のとき $y=0$ なので $0=0-1+C$ より $C=1$.

よって $\boldsymbol{y=e^{-x^3}+x^3-1}$

(3)　題意より $\dfrac{dT}{dt}=-k(T-T_0)$ が成り立つ.

このとき $T\neq T_0$ より $\dfrac{1}{T-T_0}dT=-k\,dt$ とできるので，積分定数 C を用いて

$$\log|T-T_0|=-kt+C \qquad \therefore \quad |T-T_0|=e^{-kt+C}$$

となる．ここで，$\pm e^C=D$ とおくと，この式は $T=T_0+De^{-kt}$ となるが，$t=0$ のとき $T=2T_0$ より $2T_0=T_0+D$ つまり $D=T_0$ となるので，$\boldsymbol{T=T_0(1+e^{-kt})}$

［B］(1)　与式両辺を x で微分すると

$$\boldsymbol{f'(x)+f(x)=\cos x}$$

(2)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\{e^xf(x)\}&=e^xf(x)+e^xf'(x)\\&=e^x\{f'(x)+f(x)\}\\&=\boldsymbol{e^x\cos x}\quad \text{((1)より)}\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}&\int_0^x e^t(\sin t+\cos t)dt\\&=\Big[e^t(\sin t+\cos t)\Big]_0^x-\int_0^x e^t(\cos t-\sin t)dt\\&=e^x(\sin x+\cos x)-1+\int_0^x e^t(\sin t-\cos t)dt\end{aligned}$$

(4)　(3)より

$$\begin{aligned}&\int_0^x e^t(\sin t+\cos t)dt-\int_0^x e^t(\sin t-\cos t)dt\\&=e^x(\sin x+\cos x)-1\\&\therefore \quad \int_0^x e^t\cos t\,dt=\frac{e^x}{2}(\sin x+\cos x)-\frac{1}{2}=\boldsymbol{\frac{1}{2}\{e^x(\sin x+\cos x)-1\}}\end{aligned}$$

(5)　(2)(4)より

$$\int_0^x\{e^tf(t)\}'dt=\int_0^x e^t\cos t\,dt$$

$$\iff \quad e^xf(x)-e^0f(0)=\frac{e^x}{2}(\sin x+\cos x)-\frac{1}{2}$$

ここで与式両辺に $x=0$ を代入すると

$$f(0)+0=\sin 0 \qquad \therefore \quad f(0)=0$$

よって

$$f(x)=\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)-\frac{1}{2}e^{-x}=\boldsymbol{\frac{1}{2}(\sin x+\cos x-e^{-x})}$$

第23講　積分でやっておきたいこと（その1）

23

［A］ 次の問いに答えよ．

(1) 任意の実数 t に対して，t を定数とする次の3次方程式はただ1つの実数解をもつことを示せ．

$$x^3+12x=t$$

以下，この実数解を $f(t)$ と表す．

(2) 関数 $f(t)$ のグラフのおよその様子を描け．

(3) xy 平面上の動点Pの x 座標，y 座標が時刻 t の関数として $x=f(t)$，$y=\dfrac{1}{4}\{f(t)\}^2$ で与えられているとする．点 $(0,\ 1)$ をFとするとき，時刻 t $(t\geqq 0)$ から時刻 $t+h$ $(h>0)$ までの間に線分FPの通過する部分の面積を S とする．このとき，

(I) S を求め，S は t に関係しないことを示せ．

(II) 時刻 t のとき，加速度ベクトルを方向ベクトルとし，点Pを通る直線は定点を通ることを示せ．

［B］ 自然数 n に対して，関数 $f_n(x)=x^ne^{1-x}$ と，その定積分 $a_n=\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$ を考える．ただし，e は自然対数の底である．次の問いに答えよ．

(1) 区間 $0\leqq x\leqq 1$ 上で $0\leqq f_n(x)\leqq 1$ であることを示し，さらに $0<a_n<1$ が成り立つことを示せ．

(2) a_1 を求めよ．$n>1$ に対して a_n と a_{n-1} の間の漸化式を求めよ．

(3) 自然数 n に対して，等式 $\dfrac{a_n}{n!}=e-\left(1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n!}\right)$ が成り立つことを証明せよ．

(4) いかなる自然数 n に対しても，$n!e$ は整数とならないことを示せ．

【答】　［A］ 略

［B］ (1) 略　(2) $a_1=e-2$，$a_n=na_{n-1}-1$　(3) 略　(4) 略

【解説】

［A］ (1) $g(x)=x^3+12x$ とおくと

$$g'(x)=3x^2+12>0$$

$t=0$ のとき $g(0)=0$ より $x=0$ が解．

$t\neq 0$ のとき

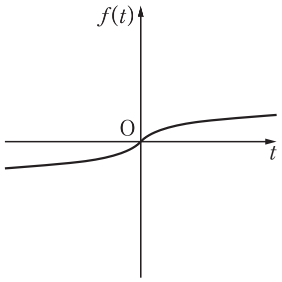
$$g\left(\frac{1}{12}t\right)=\frac{1}{12^3}t^3+t,\qquad g(0)=0$$

となることより $\left\{g\left(\dfrac{1}{12}t\right)-t\right\}\{g(0)-t\}<0$ であるから $g(x)=t$ の実数解は0と $\dfrac{1}{12}t$ の間にただ1つ存在する．

(2)　$f(x)$ と $g(x)$ は互いに逆関数である．つまり

$$g(x)=t \iff x=f(t)$$

という関係であるので，グラフは右図のようになる．



(3)　(Ⅰ)　$\alpha=f(t)$，$\beta=f(t+h)$ とおくと

$$\alpha^3+12\alpha=t,\ \beta^3+12\beta=t+h$$

である．このとき

$$S=\left(1+\frac{1}{4}\beta^2\right)\times\beta\times\frac{1}{2}-\left(1+\frac{1}{4}\alpha^2\right)\times\alpha\times\frac{1}{2}-\int_\alpha^\beta\frac{1}{4}x^2dx$$

$$=\frac{1}{24}(\beta^3+12\beta)-\frac{1}{24}(\alpha^3+12\alpha)$$

$$=\frac{1}{24}(t+h)-\frac{1}{24}t=\frac{1}{24}h$$

よって S は t に関係しない．

(Ⅱ)　$x^3+12x=t$ より

$$3(x^2+4)\frac{dx}{dt}=1 \qquad \therefore\ \ 6x\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+3(x^2+4)\frac{d^2x}{dt^2}=0$$

ゆえに

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{x}{2(y+1)}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

また $y=\frac{1}{4}x^2$ より

$$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{2}x\frac{dx}{dt}$$

$$\therefore\ \ \frac{d^2y}{dt^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}x\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{-y+1}{2(y+1)}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

よって

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2},\ \frac{d^2y}{dt^2}\right)/\!/(-x,\ -y+1)$$

$$\perp(1-y,\ x)$$

となるので点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ とすると，題意の直線は

$$(1-q)(x-p)+p(y-q)=0$$

$$\iff\ (1-q)x+py-p=0$$

$$\iff\ p(y-1)-\frac{1}{4}p^2x+x=0$$

となる．これが p に関する恒等式より

$$y-1=x=0$$

よってこの直線は定点 $(0,\ 1)$ を通る．

［B］ (1)　n は自然数で $0 \leqq x \leqq 1$ より

$$f_n'(x) = nx^{n-1}e^{1-x} + x^n(-e^{1-x})$$
$$= x^{n-1}e^{1-x}(n-x) \geqq 0$$

$f_n(0)=0$，$f_n(1)=1$ であるので

$$0 \leqq f_n(x) \leqq 1$$

区間 [0，1] で積分すると，

$$\int_0^1 0\,dx < \int_0^1 f_n(x)dx < \int_0^1 1\,dx \qquad \therefore \quad 0 < a_n < 1$$

(2)　$f_1(x) = xe^{1-x}$ であり $\{-(x+1)e^{1-x}\}' = xe^{1-x}$ より

$$a_1 = \int_0^1 f_1(x)dx = \Big[-(x+1)e^{1-x}\Big]_0^1 = \boldsymbol{e-2}$$

また

$$a_n = \int_0^1 x^n e^{1-x}dx$$
$$= \Big[x^n(-e^{1-x})\Big]_0^1 - \int_0^1 nx^{n-1}(-e^{1-x})dx$$
$$= -1 + n\int_0^1 x^{n-1}e^{1-x}dx$$
$$\therefore \quad \boldsymbol{a_n = na_{n-1} - 1}$$

(3)　$a_n = na_{n-1} - 1 \iff \dfrac{a_n}{n!} = \dfrac{a_{n-1}}{(n-1)!} - \dfrac{1}{n!}$

よって

$$\frac{a_n}{n!} = \frac{a_{n-1}}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}$$
$$= \frac{a_{n-2}}{(n-2)!} - \left\{\frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}\right\}$$
$$= \cdots = \frac{a_1}{1!} - \left\{\frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}\right\}$$
$$= e - 2 - \left(\frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$$
$$= e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$$

(4)　(3)より

$$n!e = \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)n! + a_n$$

である．ここで

$$\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)n!$$
$$= n! + \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} + \cdots + \frac{n!}{n!}$$

よりこれは整数である．また(1)から $0 < a_n < 1$ より $n!e$ は整数となることはない．

第24講　積分でやっておきたいこと（その2）

24

［A］ 関数 $g(x)$ は次の3つの条件を満たすとする．

(i) $g(0)=0$

(ii) すべての x について，$g(x)=g(1-x)$

(iii) すべての x について，$g''(x)<0$

実数 t が $t>0$ の範囲を動くとき，関数

$$f(t)=\int_0^1|x^2-tg(x)|dx$$

の最小値を求めよ．

［B］ 次の問いに答えよ．

(1) 以下の等式を示せ．

$$\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)}{\cos x}=\sqrt{3}+\tan x \quad \left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$$

(2) 閉区間 $[0,\ a]$ で連続な関数 $f(x)$ に対して，

$$\int_0^a f(a-x)dx=\int_0^a f(x)dx$$

を示せ．

(3) 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\log(\sqrt{3}+\tan x)dx$ の値を求めよ．

【答】 ［A］ $\frac{1}{4}$

［B］ (1) 略　(2) 略　(3) $\frac{\pi}{6}\log 2$

【解説】

［A］ (ii)より

$$g\left(\frac{1}{2}-t\right)=g\left(1-\left(\frac{1}{2}-t\right)\right)=g\left(\frac{1}{2}+t\right)$$

となるので $y=g(x)$ のグラフは $x=\frac{1}{2}$ に関して対称で上に凸なものとなる．これと $g(0)=0$ より $y=x^2$ と $y=tg(x)$ は $x=0$ と $0<x<1$ に1つずつ共有点をもつので，後者を $x=\alpha\ (0<\alpha<1)$ とおく．

$$\alpha^2=tg(\alpha)$$

このとき

$$\begin{aligned}f(t)&=\int_0^\alpha\{-x^2+tg(x)\}dx+\int_\alpha^1\{x^2-tg(x)\}dx\\&=\left\{\int_0^\alpha g(x)dx-\int_\alpha^1 g(x)dx\right\}t+\int_0^\alpha(-x^2)dx+\int_\alpha^1 x^2dx\\&=\left\{\int_0^\alpha g(x)dx-\int_\alpha^1 g(x)dx\right\}\frac{\alpha^2}{g(\alpha)}+\int_0^\alpha(-x^2)dx+\int_\alpha^1 x^2dx\end{aligned}$$

この α の関数を微分すると

$$2g(\alpha)\cdot\frac{\alpha^2}{g(\alpha)}+\left\{\int_0^{\alpha}g(x)dx-\int_{\alpha}^{1}g(x)dx\right\}\cdot\frac{2\alpha g(\alpha)-\alpha^2g'(\alpha)}{\{g(\alpha)\}^2}-2\alpha^2$$
$$=\left\{\int_0^{\alpha}g(x)dx-\int_{\alpha}^{1}g(x)dx\right\}\cdot\frac{2\alpha g(\alpha)-\alpha^2g'(\alpha)}{\{g(\alpha)\}^2}$$

ここで

$$\{2\alpha g(\alpha)-\alpha^2g'(\alpha)\}'=2g(\alpha)-\alpha^2g''(\alpha)>0$$

$2\times0\cdot g(0)-0^2\cdot g'(0)=0$ より $2\alpha g(\alpha)-\alpha^2g'(\alpha)>0$

　よって　$0<x<1$ において

$$\int_0^{\alpha}g(x)dx-\int_{\alpha}^{1}g(x)dx$$
$$=\int_0^{\alpha}g(x)dx-\int_{1-\alpha}^{0}g(1-t)\cdot(-dt)$$
$$=\int_0^{\alpha}g(x)dx+\int_{1-\alpha}^{0}g(t)dt$$
$$=\int_{1-\alpha}^{\alpha}g(x)dx=0$$

となるとき $f(t)$ は最小となるが $y=g(x)$ のグラフの対称性より

$$\alpha=1-\alpha \iff \alpha=\frac{1}{2}$$

のとき $f(t)$ は最小となる．このときの $f(t)$ の値は

$$\int_0^{\frac{1}{2}}(-x^2)dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}x^2dx=\left[-\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{1}{2}}+\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$$
$$=\mathbf{\frac{1}{4}}$$

［B］ (1)

$$
\begin{aligned}
&2\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)\\
&=2\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos x+\sin\frac{\pi}{6}\sin x\right)\\
&=\sqrt{3}\cos x+\sin x
\end{aligned}
$$

よって　$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ において

$$\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)}{\cos x}=\sqrt{3}+\tan x$$

(2)　$\int_0^a f(a-x)dx$ において $a-x=t$ と置換すると $x=a$ のとき $t=0$，$x=0$ のとき $t=a$，$dx=-dt$ より

$$
\begin{aligned}
\int_0^a f(a-x)dx&=\int_a^0 f(t)(-dt)\\
&=\int_0^a f(t)dt\\
&=\int_0^a f(x)dx
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\pi}{6}}\log(\sqrt{3}+\tan x)dx\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\log\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)}{\cos x}dx \quad ((1)\text{より})\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\log 2\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{6}}\log\left\{\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)\right\}dx-\int_0^{\frac{\pi}{6}}\log(\cos x)dx\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\log 2\,dx \quad ((2)\text{より})\\
&=\boldsymbol{\frac{\pi}{6}\log 2}
\end{aligned}
$$

練習問題解答

第１講　１の n 乗根

1　１の５乗根を z_0，z_1，z_2，z_3，z_4 とする．ただし，

$$0 \leqq \arg z_0 < \arg z_1 < \arg z_2 < \arg z_3 < \arg z_4 < 2\pi$$

次の各問いに答えよ．

(1)　z_0，z_1，z_2，z_3，z_4 の偏角は，□ $\times k$，$k=0$，1，2，3，4 と表せる．

(2)　$f(z)=(z-z_0)(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)$ とする．$f(2)$ の値は □

(3)　$g(z)=(z-z_k)(z-z_k{}^2)(z-z_k{}^3)(z-z_k{}^4)$ とする．$z_k \neq z_0$ のとき，$g(2)$ の値は □

(4)　$z_k \neq z_0$ のとき，$\dfrac{1}{2-z_k}+\dfrac{1}{2-z_k{}^2}+\dfrac{1}{2-z_k{}^3}+\dfrac{1}{2-z_k{}^4}$ の値は □

【答】　(1) $\dfrac{2}{5}\pi$　(2) 31　(3) 31　(4) $\dfrac{49}{31}$

【解説】

(1)　$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とおくと

$$z^5=1 \iff r^5(\cos 5\theta+i\sin 5\theta)=1$$

$$\iff \begin{cases} r^5=1 \\ 5\theta=2\pi\times k \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4) \end{cases}$$

$$\therefore \quad r=1,\ \theta=\boldsymbol{\frac{2}{5}\pi}\times k \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

(2)　$z^5=1 \iff z^5-1=0$ の５つの解が z_0，z_1，z_2，z_3，z_4 なので

$$z^5-1=(z-z_0)(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)$$

と因数分解できる．

$$\therefore \quad f(z)=z^5-1$$

よって

$$f(2)=2^5-1=\mathbf{31}$$

(3)　$z_k \neq z_0$ のとき

$$(z-z_k)(z-z_k{}^2)(z-z_k{}^3)(z-z_k{}^4)$$
$$=(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)$$

となり，また

$$z^5-1=(z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)$$

より

$$g(z)=z^4+z^3+z^2+z+1$$

$$\therefore \quad g(2)=\mathbf{31}$$

(4)　(3)と同様に

$$\frac{1}{2-z_k}+\frac{1}{2-{z_k}^2}+\frac{1}{2-{z_k}^3}+\frac{1}{2-{z_k}^4}$$

$$=\frac{1}{2-z_1}+\frac{1}{2-z_2}+\frac{1}{2-z_3}+\frac{1}{2-z_4}$$

$$=\frac{4-(z_1+z_4)}{(2-z_1)(2-z_4)}+\frac{4-(z_2+z_3)}{(2-z_2)(2-z_3)}$$

$$=\frac{4-(z_1+z_4)}{5-2(z_1+z_4)}+\frac{4-(z_2+z_3)}{5-2(z_2+z_3)}$$

$$=1+\frac{3}{2}\left\{\frac{1}{5-2(z_1+z_4)}+\frac{1}{5-2(z_2+z_3)}\right\}$$

$$=1+\frac{3}{2}\cdot\frac{10-2(z_1+z_2+z_3+z_4)}{\{5-2(z_1+z_4)\}\{5-2(z_2+z_3)\}}$$

$$=1+\frac{3}{2}\cdot\frac{10-2(-1)}{g(2)}$$

$$=1+\frac{18}{31}$$

$$=\mathbf{\frac{49}{31}}$$

第2講　点を回転する

2　複素数平面上に四角形 ABCD があり，頂点 A，B，C，D は反時計回りに順に並んでいるものとし，4 点 A，B，C，D を表す複素数をそれぞれ z_1，z_2，z_3，z_4 とする．各辺を 1 辺とする 4 つの正方形 BAPQ，CBRS，DCTU，ADVW を四角形 ABCD の外側に作り，正方形 BAPQ，CBRS，DCTU，ADVW の中心をそれぞれ K，L，M，N とおく．

(1)　点 K を表す複素数 w_1 を z_1 と z_2 で表せ．

(2)　KM＝LN，KM⊥LN を証明せよ．

(3)　線分 KM と線分 LN の中点が一致するのは四角形 ABCD がどのような図形のときか．

【答】 (1) $w_1=\dfrac{1+i}{2}z_1+\dfrac{1-i}{2}z_2$　(2) 略　(3) 平行四辺形のとき

【解説】

(1)　Q(z) とすると

$$z-z_2=(z_1-z_2)\times i \iff z=iz_1+(1-i)z_2$$

ゆえに

$$\begin{aligned} w_1&=\frac{1}{2}(z+z_1)\\ &=\boldsymbol{\frac{1+i}{2}z_1+\frac{1-i}{2}z_2} \end{aligned}$$

(2)　L(w_2)，M(w_3)，N(w_4) とすると，(1)と同様に

$$w_2=\frac{1+i}{2}z_2+\frac{1-i}{2}z_3$$

$$w_3=\frac{1+i}{2}z_3+\frac{1-i}{2}z_4$$

$$w_4=\frac{1+i}{2}z_4+\frac{1-i}{2}z_1$$

となる．ここで，

$$\begin{aligned} &w_3-w_1\\ &=-\frac{1+i}{2}z_1-\frac{1-i}{2}z_2+\frac{1+i}{2}z_3+\frac{1-i}{2}z_4\\ &=-i\left(\frac{1-i}{2}z_1-\frac{1+i}{2}z_2-\frac{1-i}{2}z_3+\frac{1+i}{2}z_4\right)\\ &=-i(w_4-w_2) \end{aligned}$$

となるので

$$\text{KM}=\text{LN} \text{ かつ } \text{KM}\perp\text{LN}$$

が示された．

(3)

$$\frac{w_1+w_3}{2}=\frac{w_2+w_4}{2}$$

$$\iff w_1-w_2+w_3-w_4=0$$

$$\iff iz_1-iz_2+iz_3-iz_4=0$$

$$\iff \frac{z_1+z_3}{2}=\frac{z_2+z_4}{2}$$

よって AC と BD の中点が一致する場合，すなわち**平行四辺形のとき**.

第３講　複素数と円

3　a，b を $|a|\neq|b|$，$a\neq0$ を満たす実数定数とし，複素数 z に対して

$$w=\frac{(a+b)(z+1)}{az+b}$$

とする.

(1)　z が単位円上の点であるとき，w は点 $\alpha=1$ を中心とする半径１の円周上の点であることを示せ.

(2)　z が単位円の内部の点であるとき，w が $\alpha=1$ を中心とする半径１の円の外部の点であるための a，b の条件を求めよ.

【答】 (1) 略　(2) $|a|>|b|$

【解説】

(1)

$$w=\frac{(a+b)(z+1)}{az+b}$$

$$\iff w=\frac{a+b}{a}+\frac{(a+b)(a-b)}{a(az+b)}$$

$$\iff aw-(a+b)=\frac{(a+b)(a-b)}{az+b}$$

$$\iff az+b=\frac{(a+b)(a-b)}{aw-(a+b)}$$

$$\iff z=\frac{-bw+(a+b)}{aw-(a+b)}$$

これを $|z|=1$ に代入すると

$$|z|=1$$

$$\iff \left|\frac{-bw+(a+b)}{aw-(a+b)}\right|=1$$

$$\iff |bw-(a+b)|=|aw-(a+b)|$$

$$\iff \{bw-(a+b)\}\{b\overline{w}-(a+b)\}=\{aw-(a+b)\}\{a\overline{w}-(a+b)\}$$

$$\iff b^2w\overline{w}-b(a+b)\overline{w}-b(a+b)w+(a+b)^2=a^2w\overline{w}-a(a+b)\overline{w}-a(a+b)w+(a+b)^2$$

$$\iff (a-b)(a+b)w\overline{w}-(a-b)(a+b)\overline{w}-(a-b)(a+b)w=0$$

$$\iff w\overline{w}-\overline{w}-w=0$$

$$\iff (w-1)(\overline{w}-1)=1$$

$$\iff |w-1|=1$$

よって，示された.

(2)　(1)と同様に

$$
\begin{aligned}
& |z|<1 \\
\iff & \left|\frac{-bw+(a+b)}{aw-(a+b)}\right|<1 \\
\iff & (a-b)(a+b)(w\overline{w}-\overline{w}-w)>0 \\
\iff & (a^2-b^2)(|w-1|^2-1)>0
\end{aligned}
$$

ここで $|w-1|>1$ であるためには

$$a^2-b^2>0 \qquad \therefore \quad |\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{b}|$$

第４講　複素数と領域

> 4　0 でない複素数 z に対し，$w=z^2-\dfrac{1}{z^2}$ とおく．このとき，w の実部が正になるような z の範囲を複素数平面上に図示せよ．

【答】　略

【解説】

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$　$(r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
w&=z^2-\frac{1}{z^2}\\
&=r^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)-\frac{1}{r^2}\{\cos(-2\theta)+i\sin(-2\theta)\}\\
&=\left(r^2-\frac{1}{r^2}\right)\cos 2\theta+i\left(r^2+\frac{1}{r^2}\right)\sin 2\theta
\end{aligned}
$$

ここで w の実部が正より

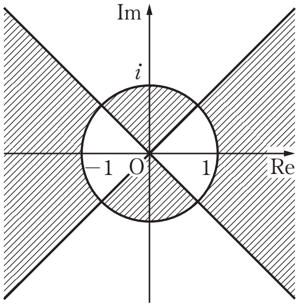
$$
\left(r^2-\frac{1}{r^2}\right)\cos 2\theta>0
$$

$$
\iff (r-1)\cos 2\theta>0
$$

$$
\iff \begin{cases} r-1>0 \text{ かつ } \cos 2\theta>0 \\ \qquad\text{または} \\ r-1<0 \text{ かつ } \cos 2\theta<0 \end{cases}
$$

$$
\iff \begin{cases} r>1 \text{ かつ } 0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3}{4}\pi<\theta<\dfrac{5}{4}\pi,\ \dfrac{7}{4}\pi<\theta<2\pi \\ \qquad\text{または} \\ r<1 \text{ かつ } \dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{5}{4}\pi<\theta<\dfrac{7}{4}\pi \end{cases}
$$

よって z の範囲は境界を含まない下図の斜線部分.



第5講　媒介変数で表された曲線

5　座標平面上に原点Oを中心とする半径2の円 C_1 がある．半径1の円 C_2 が C_1 に外接しながら滑ることなく転がるとき，C_2 上の定点Pが描く曲線について考える．C_2 の中心をQとし，Qが点 $(3,\ 0)$ にあるとき，Pは点 $(4,\ 0)$ にあるとする．このとき，x 軸の正の方向から線分OQへ測った角を θ として，以下の問いに答えよ．

(1)　Qを始点として x 軸の正の方向に平行で同じ向きの半直線から線分QPへ測った角は 3θ であることを示せ．

(2)　点Pの座標 $(x,\ y)$ を θ で表せ．

(3)　$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ において y の最大値を求めよ．

(4)　θ が $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ の範囲を動くとき，点Pの描く曲線の長さを求めよ．

【答】 (1) 略　(2) $\begin{cases} x = 3\cos\theta + \cos 3\theta \\ y = 3\sin\theta + \sin 3\theta \end{cases}$　(3) $2\sqrt{2}$　(4) 24

【解説】

(1)　Qに関してPの対称な点をR，C_1 と C_2 の接点をSとおく．A$(2,\ 0)$ とし，$\angle \mathrm{AOQ} = \theta$ のとき，

$$\overset{\frown}{\mathrm{AS}} = \overset{\frown}{\mathrm{SR}} \iff \mathrm{OA} \cdot \angle \mathrm{AOQ} = \mathrm{QR} \cdot \angle \mathrm{SQR}$$

$$\therefore \quad \angle \mathrm{SQR} = 2\theta$$

よって求める角は

$$\angle \mathrm{AOS} + \angle \mathrm{SQR} = 3\theta$$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = 3(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\overrightarrow{\mathrm{QP}} = (\cos 3\theta,\ \sin 3\theta)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \overrightarrow{\mathrm{QP}} = \boldsymbol{(3\cos\theta + \cos 3\theta,\ 3\sin\theta + \sin 3\theta)}$$

(3)　$y = 3\sin\theta + \sin 3\theta$ より

$$\frac{dy}{d\theta} = 3\cos\theta + 3\cos 3\theta$$

$$= 12\cos\theta\left(\cos\theta - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

であるので，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ における y の増減は

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	π
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y		↗		↘		↗		↘	

となるので y の最大値は $\theta = \frac{\pi}{4}$ と $\frac{3}{4}\pi$ のとき

$$3 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

$\pi < \theta \leqq 2\pi$ のとき $\sin\theta \leqq 0$ より

$$y = 3\sin\theta + \sin 3\theta \leqq 1$$

であるから，$\boldsymbol{2\sqrt{2}}$ は $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ における y の最大値である．

(4)　$\dfrac{dx}{d\theta}=-3\sin\theta-3\sin 3\theta$ より

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2=18+18\cos 2\theta$$
$$=36\cos^2\theta$$

となるのでＰの描く曲線の長さは

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{36\cos^2\theta}\,d\theta=\int_0^{2\pi}6|\cos\theta|d\theta$$
$$=24\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta$$
$$=24\Big[\sin\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\mathbf{24}$$

第6講　2次曲線と極座標

6　極方程式

$$r=\frac{b}{1-a\cos\theta}\quad (b\neq 0,\ 0<a<1)$$

で与えられる曲線と，媒介変数表示された曲線

$$\begin{cases} x=\dfrac{4}{3}\cos t \\ y=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\sin t \end{cases}$$

を x 軸方向へ $\dfrac{2}{3}$ だけ平行移動した曲線が一致するように a，b の値を求めよ．

【答】 $a=\dfrac{1}{2}$，$b=1$

【解説】

$$\begin{aligned} r=\frac{b}{1-a\cos\theta} &\iff r-ar\cos\theta=b \\ &\iff r=ar\cos\theta+b \\ &\iff \sqrt{x^2+y^2}=ax+b \end{aligned}$$

両辺を2乗すると

$$\begin{aligned} & x^2+y^2=(ax+b)^2 \\ \iff & (1-a^2)x^2+y^2-2abx-b^2=0 \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{cases} x=\dfrac{4}{3}\cos t \\ y=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\sin t \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{3}{4}x=\cos t \\ \dfrac{3}{2\sqrt{3}}y=\sin t \end{cases}$$

よって

$$\frac{9}{16}x^2+\frac{3}{4}y^2=1$$

この曲線を x 軸方向へ $\dfrac{2}{3}$ だけ平行移動したものは

$$\begin{aligned} & \frac{9}{16}\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{3}{4}y^2=1 \\ \iff & \frac{3}{4}\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+y^2=\frac{4}{3} \\ \iff & \frac{3}{4}x^2+y^2-x-1=0 \end{aligned}$$

2つの曲線が一致するので

$$\begin{cases} 1-a^2=\dfrac{3}{4} \\ -2ab=-1 \\ -b^2=-1 \end{cases} \iff \begin{cases} \boldsymbol{a=\dfrac{1}{2}} \\ \boldsymbol{b=1} \end{cases}$$

第7講　よくある極限

7　次の極限を求めよ．ただし，必要であれば $x>0$ のとき $e^x>x$ が成り立つことを用いてよい．

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x}}{e^x}$

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to+0}x^{\frac{x}{2}}$

【答】　(1) 0　(2) 1

【解説】

(1)　$x>0$ のとき $e^x>x$ が成り立つので，$\dfrac{1}{x^{\frac{2}{3}}}>\dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{e^x}>0$ が成り立つ．ここで $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}=0$ より　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x}}{e^x}=\mathbf{0}$

(2)　(1)より $\displaystyle\lim_{u\to\infty}\frac{u}{e^{u^3}}=0$ である．$\log x=-3u^3$ とおくと，$x=e^{-3u^3}$ であり，$x\to+0$ のとき $u\to\infty$ なので，$\displaystyle\lim_{x\to+0}x^{\frac{x}{2}}=\lim_{u\to\infty}\left(e^{-3u^3}\right)^{\frac{e^{-3u^3}}{2}}=\lim_{u\to\infty}e^{-\frac{3}{2}\left(\frac{u}{e^{u^3}}\right)^3}=\mathbf{1}$

第8講　挟んで極限

8　関数 $f(x)$ を $f(x)=x\sin x-\cos x$ で定める．また，n を自然数とする．

(1)　$2n\pi \leqq x \leqq 2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ の範囲において，$f(x)=0$ となる x がただ1つ存在することを示せ．

(2)　(1)での $f(x)=0$ となる x の値を a_n とする $\left(2n\pi \leqq a_n \leqq 2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$．このとき，$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-2n\pi)=0$ を示せ．

【答】　略

【解説】

(1)
$$f\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\cdot 1-0>0$$

よって $x=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ は解とはならないので

$2n\pi \leqq x < 2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ とすると，$2n\pi>0$ より

$$f(x)=0 \iff x\sin x-\cos x=0$$
$$\iff \tan x=\frac{1}{x}$$

ここで $y=\tan x$ と $y=\dfrac{1}{x}$ のグラフは

$2n\pi < x < 2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ にただ1つの共有点をもつので，その x 座標が求める解となる．

(2)　(1)より

$$f(a_n)=0 \iff \tan a_n=\frac{1}{a_n} \quad \cdots\cdots ①$$

また

$$2n\pi < a_n < 2n\pi+\frac{\pi}{2}$$
$$\iff 0<a_n-2n\pi<\frac{\pi}{2} \quad \cdots\cdots ②$$

ここで

$$\tan(a_n-2n\pi)=\tan a_n$$
$$=\frac{1}{a_n}\quad (①より)$$

となるが，

$$2n\pi < a_n < 2n\pi+\frac{\pi}{2}$$
$$\iff \frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}<\frac{1}{a_n}<\frac{1}{2n\pi}$$

これと

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n\pi}=0$$

よって

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=0$$

ゆえに

$$\lim_{n\to\infty}\tan(a_n-2n\pi)=0$$

$$\iff \lim_{n\to\infty}(a_n-2n\pi)=0 \quad \text{（②より）}$$

よって，示された.

第９講　ちょっと難あり極限

9　${}_n\mathrm{C}_k$ を二項係数とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{5^n}$ を求めよ．

【答】 0

【解説】

$\dfrac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{5^n}=a_n$ とおくと

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\dfrac{{}_{2(n+1)}\mathrm{C}_{n+1}}{5^{n+1}}}{\dfrac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{5^n}}=\frac{\dfrac{(2n+2)!}{5^{n+1}\{(n+1)!\}^2}}{\dfrac{(2n)!}{5^n(n!)^2}}=\frac{4}{5}-\frac{2}{5(n+1)}$$

となるので，自然数 n に対して $\dfrac{3}{5}\leqq\dfrac{4}{5}-\dfrac{2}{5(n+1)}<\dfrac{4}{5}$ なので $a_{n+1}<\dfrac{4}{5}a_n$ が成り立つ．

よって $a_n<\left(\dfrac{4}{5}\right)^{n-1}a_1$ となるが，$a_n>0$ より $0<a_n<\left(\dfrac{4}{5}\right)^{n-1}a_1$ となる．

ここで $\left(\dfrac{4}{5}\right)^{n-1}a_1\to 0\ (n\to\infty)$ より　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{5^n}=\mathbf{0}$

第 10 講　一般項を求めないで極限

10　$a_{n+1}=\frac{1}{5}\left(a_n+\frac{4}{a_n}\right)$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ および $a_1=\frac{4}{5}$ を満たす数列 $\{a_n\}$ において，次の問いに答えよ．

(1)　すべての自然数 n に対して $a_n \geqq \frac{4}{5}$ が成り立つことを示せ．

(2)　極限値 $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

【答】 (1) 略　(2) 1

【解説】

(1)　$a_1=\frac{4}{5}$ より $n \geqq 1$ について $a_n \geqq \frac{4}{5}$ と仮定するとき

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{5}\left(a_n+\frac{4}{a_n}\right) \\ &\geqq \frac{1}{5}\cdot 2\sqrt{a_n\cdot\frac{4}{a_n}}=\frac{4}{5} \end{aligned}$$

より帰納的に $a_n \geqq \frac{4}{5}$ が示された．

(2)

$$\begin{aligned} a_{n+1}-1 &= \frac{1}{5}\left(a_n+\frac{4}{a_n}-5\right) \\ &= \frac{1}{5}\left(1-\frac{4}{a_n}\right)(a_n-1) \end{aligned}$$

より

$$|a_{n+1}-1|=\frac{1}{5}\left|1-\frac{4}{a_n}\right||a_n-1|$$

ここで

$$a_n \geqq \frac{4}{5} \iff -4 \leqq 1-\frac{4}{a_n} < 1$$

$$\therefore\quad \frac{1}{5}\left|1-\frac{4}{a_n}\right| \leqq \frac{4}{5}$$

よって

$$|a_{n+1}-1| \leqq \frac{4}{5}|a_n-1|$$

ゆえに

$$|a_n-1| \leqq \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}|a_1-1| \to 0 \quad (n\to\infty)$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n = 1}$$

第 11 講　無限級数

11　次の無限級数の収束・発散を調べよ．ただし，必要であれば自然数 n に対して $\displaystyle\int_1^n \frac{1}{\sqrt{x}}dx=2(\sqrt{n}-1)$ が成り立つことを用いてよい．

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\cdots\cdots$$

【答】　発散する

【解説】

$y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ のグラフより面積の大小に注目すると

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n}}+\int_1^n \frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

が成り立つが，$\displaystyle\frac{1}{\sqrt{n}}+\int_1^n \frac{1}{\sqrt{x}}dx=\frac{1}{\sqrt{n}}+2(\sqrt{n}-1)\to\infty$ $(n\to\infty)$ より与式は**発散する**．

第12講　微分について

12　関数 $y=f(x)$ は連続とする．

(1)　a を実数の定数とする．すべての実数 x に対して不等式 $|f(x)-f(a)|\leqq\dfrac{2}{3}|x-a|$ が成り立つなら，曲線 $y=f(x)$ は直線 $y=x$ と必ず交わることを中間値の定理を用いて証明せよ．

(2)　さらに，すべての実数 x_1，x_2 に対して $|f(x_1)-f(x_2)|\leqq\dfrac{2}{3}|x_1-x_2|$ が成り立つならば，(1)の交点はただ1つしかないことを証明せよ．

【答】　略

【解説】

(1)

$$|f(x)-f(a)|\leqq\frac{2}{3}|x-a|$$

$$\iff\quad f(a)-\frac{2}{3}|x-a|\leqq f(x)\leqq f(a)+\frac{2}{3}|x-a|$$

よって

$$f(a)-\frac{2}{3}|x-a|-x\leqq f(x)-x\leqq f(a)+\frac{2}{3}|x-a|-x$$

が成り立つ．ここで

$$\lim_{x\to\infty}\left\{f(a)+\frac{2}{3}|x-a|-x\right\}=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left\{f(a)-\frac{2}{3}|x-a|-x\right\}=\infty$$

より

$f(x)-x=0$ となる x，つまり $f(x)=x$ となる x は存在する．

よって $y=f(x)$ と $y=x$ は必ず共有点をもつ．

(2)　$f(x)=x$ となる実数解の1つを α とおき，

$g(x)=x-f(x)$ とすると，$g(\alpha)=\alpha-f(\alpha)=0$　ここで，$x\neq\alpha$ のとき

$$\begin{aligned}|g(x)|&=|x-f(x)|\\&=|x-\alpha-\{f(x)-f(\alpha)\}|\qquad(f(\alpha)=\alpha\text{ より})\\&\geqq|x-\alpha|-|f(x)-f(\alpha)|\\&\geqq|x-\alpha|-\frac{2}{3}|x-\alpha|\\&=\frac{1}{3}|x-\alpha|>0\end{aligned}$$

よって $g(x)\neq0$ $(x\neq\alpha)$　ゆえに $x=\alpha$ 以外で $g(x)=0$ となるものはない．

第13講　接線といえば

13　$\sin 1 < 0.85$ を示せ.

【答】 略

【解説】

$f(x)=\sin x$ とおく．ここで $x=\dfrac{\pi}{3}$ における $y=f(x)$ の接線を $y=g(x)$ とおくと，

$f'(x)=\cos x$ より $f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$ なので，$g(x)=\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)+\sin\dfrac{\pi}{3}$ つまり

$g(x)=\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となるが，$0<x<\pi$ のとき $f''(x)=-\sin x<0$ より $y=f(x)$ は

上に凸なグラフをもつので，$f(x) \leqq g(x)$（等号は $x=\dfrac{\pi}{3}$ のときだけ成立）となる.

よって $\sin 1=f(1)<g(1)$ が成立するので，$\sin 1<g(1)=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{\pi}{3}\right)+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となる.

このとき $g(1)<\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{3.14}{3}\right)+\dfrac{1.74}{2}=0.846\cdots$

となるので $\sin 1<0.85$ が示された.

第 14 講　グラフを描く

14　次のグラフを描け.

(1)　$y=x\log x-(x-1)\log(x+1)$

(2)　$(x,\ y)=(e^{-t}\cos t,\ e^{-t}\sin t)$　$(0\leqq t\leqq\pi)$

【答】　略

【解説】

(1)　$f(x)=x\log x-(x-1)\log(x+1)$ とおくと

$f'(x)=\log x-\log(1+x)+\dfrac{2}{x+1}$，$f''(x)=\dfrac{1-x}{x(1+x)^2}$ であり，

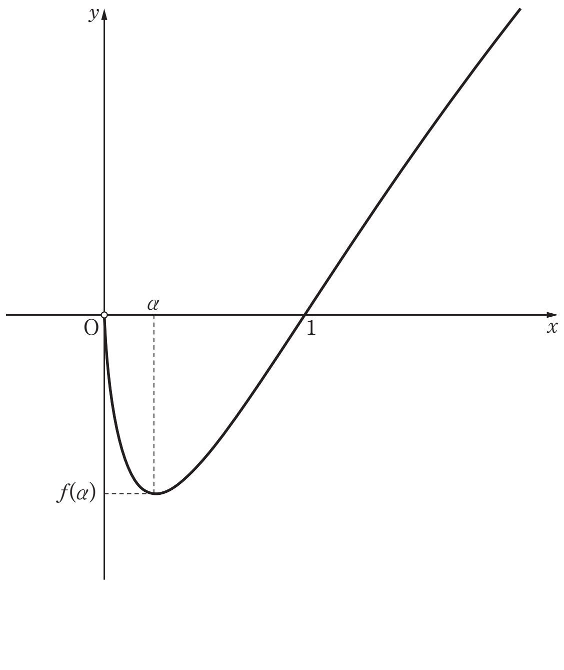
$\lim_{x\to+0}f'(x)=-\infty$，$\lim_{x\to\infty}f'(x)=0$ より $f'(x)$ の増減は

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	∞
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$	$-\infty$	↗	正	↘	0

となるので，$f'(x)=0$ は $x>0$ に実数解をただ 1 つだけもち，それを α とおくと，$0<\alpha<1$ を満たす．このとき

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	1	$\cdots$	∞
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$f(x)$	(0)	↘	$f(\alpha)$	↗	0	↗	∞

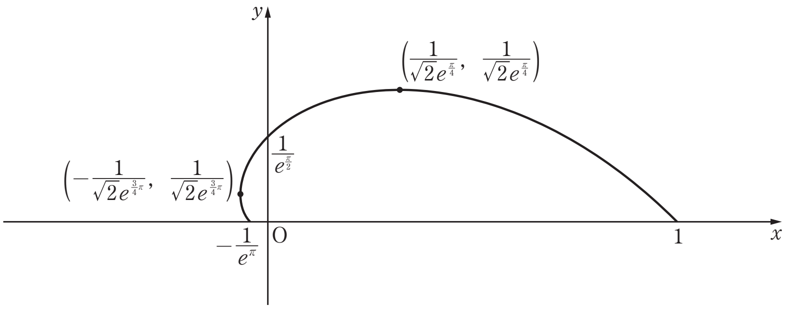
となるので，グラフは下図.



(2)　$\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)=\left(\sqrt{2}\,e^{-t}\sin\left(t+\dfrac{5}{4}\pi\right),\ \sqrt{2}\,e^{-t}\sin\left(t+\dfrac{3}{4}\pi\right)\right)$ より増減は

t	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\dfrac{3}{4}\pi$	$\cdots$	π
x'		$-$	$-$	$-$	0	$+$	
y'		$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$(x,\ y)$	$(1,\ 0)$	$\nwarrow$	$\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}}}\right)$	$\swarrow$	$\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}\,e^{\frac{3}{4}\pi}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}\,e^{\frac{3}{4}\pi}}\right)$	$\searrow$	$\left(-\dfrac{1}{e^{\pi}},\ 0\right)$

となるので，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\sin t-\cos t}{\sin t+\cos t}$ に注意すると，グラフは下図.



第15講　ちょっと訳あり増減

15　ABを直径とする半径1の半円がある．Pを半円周上の動点とし，$\angle PAB=\theta$ とおくとき，Pは $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす範囲を動く．直径ABと弦APと $\overset{\frown}{PB}$ で囲まれた部分の面積を $T(\theta)$ で表す．

(1)　$T(\theta)$ を求めよ．

(2)　Pが半円周上を $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ の範囲で動くとき，線分APを折り目にしてこの半円を折り重ね，重なった部分の面積を $S(\theta)$ とおく．このとき $S(\theta)$ を $T(\theta)$ と $T(2\theta)$ を用いて表せ．

(3)　(2)の $S(\theta)$ の最大値を与える θ の値を α とするとき，$\cos 2\alpha$ の値を求めよ．

【答】 (1) $\theta+\dfrac{1}{2}\sin 2\theta$　(2) $S(\theta)=T(2\theta)-T(\theta)$　(3) $\cos 2\alpha=\dfrac{1+\sqrt{17}}{8}$

【解説】

(1)　$T(\theta)$ は中心角が 2θ の扇形と頂角が $\pi-2\theta$ の二等辺三角形の面積の和であるから

$$T(\theta)=\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot 2\theta+\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin(\pi-2\theta)$$

$$=\boldsymbol{\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta}$$

(2)　折り返した半円と直径ABとの交点をQとして，点Qの折り返す前の点をRとすると $\angle QAP=\angle RAP=\theta$ より $\angle RAB=2\theta$ となるので，$\boldsymbol{S(\theta)=T(2\theta)-T(\theta)}$

(3)

$$S(\theta)=\left(2\theta+\frac{1}{2}\sin 4\theta\right)-\left(\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)$$

$$=\theta+\frac{1}{2}\sin 4\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta$$

$$\frac{d}{d\theta}S(\theta)=1+2\cos 4\theta-\cos 2\theta$$

$$=4\cos^2 2\theta-\cos 2\theta-1$$

$$\frac{d}{d\theta}S(\theta)=0 \iff 4\cos^2 2\theta-\cos 2\theta-1=0$$

$$\iff \cos 2\theta=\frac{1\pm\sqrt{17}}{8}$$

$0<\cos 2\theta<1$ より

$$\cos 2\theta=\frac{1+\sqrt{17}}{8}$$

$\cos 2\theta = \dfrac{1+\sqrt{17}}{8}$ を満たす θ を θ_0 とおくと，$S(\theta)$ の増減は

θ	0	$\cdots$	θ_0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{4}$
$S'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$S(\theta)$		↗		↘	

となるので，$\theta=\theta_0$ のとき $S(\theta)$ は最大となる．つまり，$\theta_0=\alpha$ である．よって

$$\boldsymbol{\cos 2\alpha = \frac{1+\sqrt{17}}{8}}$$

第 16 講　微分でやっておきたいこと

16　m を正の定数とし，$x \geqq 0$ で定義された連続関数 $S(x)$ が常に正の値をとるとき，$x \geqq 0$ において関数 $u(x)$，$v(x)$，$f(x)$，$g(x)$ を

$$u(x)=\int_0^x S(t)dt+m,\ v(x)=\int_0^x tS(t)dt+m,\ f(x)=\frac{v(x)}{u(x)},\ g(x)=v(x)-xu(x)$$

とおく．

(1)　$g(0)>0$，$g(1)<0$ および $x>0$ において $g'(x)<0$ を示せ．

(2)　$f(x)=x$ を満たす x の値がただ 1 つ存在することを示せ．

(3)　$f(x)=x$ を満たす x の値を a とするとき，$f(x)$ の最小値を求めよ．

【答】 (1) 略　(2) 略　(3) a

【解説】

(1)

$$\begin{cases} u(0)=m>0, & v(0)=m>0, \\ u'(x)=S(x)>0, & v'(x)=xS(x)\geqq 0 \end{cases}$$

等より

$$g(0)=v(0)=m>0,$$

$$g(1)=v(1)-u(1)=\int_0^1 (t-1)S(t)dt<0$$

$$(0<t<1 \text{ のとき } t-1<0 \text{ より})$$

$x>0$ のとき

$$\begin{aligned} g'(x)&=v'(x)-u(x)-xu'(x) \\ &=-u(x)<0 \end{aligned}$$

$$(u(0)>0,\ u'(x)>0 \text{ より } u(x)>0)$$

(2)

$$\begin{aligned} f(x)=x &\iff \frac{v(x)}{u(x)}=x \\ &\iff v(x)=xu(x) \\ &\iff g(x)=0 \end{aligned}$$

(1)より $g(x)=0$ の解は $0<x<1$ にただ 1 つだけ存在する．よって $f(x)=x$ の解についても同様である．

(3)　$f(x)=x$ の解が a より

$$f(a)=a \iff v(a)=au(a) \iff g(a)=0$$

が成り立つ．このとき

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\{u(x)\}^2}\{v'(x)u(x)-v(x)u'(x)\} \\ &= \frac{S(x)}{\{u(x)\}^2}\{-g(x)\} \end{aligned}$$

よって $f(x)$ の増減は

x	0	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘		↗

となるので最小値は

$$f(a)=\boldsymbol{a}$$

である．

第 17 講　落とせない積分計算

17　次の定積分を計算せよ．

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta}{\sin^3\theta+1}d\theta$$

【答】 $\frac{1}{3}\log 2+\frac{\sqrt{3}}{9}\pi$

【解説】

$\sin\theta=x$ と置換積分すると

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta}{\sin^3\theta+1}d\theta=\int_0^1 \frac{1}{x^3+1}dx$$

$$=\int_0^1\left(\frac{1}{3}\frac{1}{x+1}-\frac{1}{6}\frac{2x-1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}\log|x+1|-\frac{1}{6}\log(x^2-x+1)\right]_0^1+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx$$

となるが，$x-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\tan t$ と置換積分することにより

$$\int_0^1\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{2\sqrt{3}}{3}dt=\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi$$

となるので，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta}{\sin^3\theta+1}d\theta=\left[\frac{1}{3}\log|x+1|-\frac{1}{6}\log(x^2-x+1)\right]_0^1+\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi=\boldsymbol{\frac{1}{3}\log 2+\frac{\sqrt{3}}{9}\pi}$$

第18講　積分と漸化式

18　次の問いに答えよ．

(1)　p，q を0または正の整数とし

$$I_{p,\,q}=\int_0^1 t^p(1-t)^q dt$$

とおく．

(a)　$I_{p,\,0}$ の値を求めよ．

(b)　$q\geqq 1$ のとき，次の漸化式が成り立つことを証明せよ．

$$I_{p,\,q}=\frac{q}{p+1}I_{p+1,\,q-1}$$

(c)　次の等式を証明せよ．

$$I_{p,\,q}=\frac{p!q!}{(p+q+1)!}$$

(2)　n を正の整数とすると

$$\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\frac{p!(n-p)!}{(n+1)!}=\frac{1}{n+2}\{1+(-1)^n\}$$

が成り立つことを証明せよ．

【答】　(1)　(a) $I_{p,\,0}=\dfrac{1}{p+1}$　(b) 略　(c) 略　(2) 略

【解説】

(1)　(a)

$$I_{p,\,0}=\int_0^1 t^p dt$$
$$=\left[\frac{1}{p+1}t^{p+1}\right]_0^1=\boldsymbol{\frac{1}{p+1}}$$

(b)

$$I_{p,\,q}=\int_0^1 t^p(1-t)^q dt$$
$$=\left[\frac{1}{p+1}t^{p+1}(1-t)^q\right]_0^1-\int_0^1\frac{1}{p+1}t^{p+1}\cdot q(1-t)^{q-1}\cdot(-1)dt$$
$$=\frac{q}{p+1}\int_0^1 t^{p+1}(1-t)^{q-1}dt$$
$$=\frac{q}{p+1}I_{p+1,\,q-1}$$

(c)　(b)より

$$I_{p,\,q}=\frac{q}{p+1}\cdot\frac{q-1}{p+2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{p+q}I_{p+q,\,0}$$
$$=\frac{q!}{(p+1)(p+2)\cdots(p+q)}\cdot\frac{1}{p+q+1}\quad\text{((a)より)}$$
$$=\frac{p!q!}{(p+q+1)!}$$

(2)

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \sum_{p=0}^{n}(-1)^p I_{p,\ n-p} \\
&= \sum_{p=0}^{n}\int_0^1 (-t)^p(1-t)^{n-p}dt \\
&= \sum_{p=0}^{n}\int_0^1 \{(-t)^p(1-t)^{n+1-p}-(-t)^{p+1}(1-t)^{n-p}\}dt \\
&= \int_0^1 \{(1-t)^{n+1}-(-t)^{n+1}\}dt \\
&= \left[\frac{-1}{n+2}(1-t)^{n+2}+\frac{1}{n+2}(-t)^{n+2}\right]_0^1 \\
&= \frac{(-1)^{n+2}}{n+2}+\frac{1}{n+2} \\
&= \frac{1}{n+2}\{1+(-1)^n\} \\
&= (\text{右辺})
\end{aligned}
$$

第 19 講　実数解条件と体積

19　$V=\{(x,\ y,\ z)\,|\,(\sqrt{x^2+y^2}-2)^2+z^2\leqq 1\}$ とする．

(1)　V の平面 $z=t$ による切り口の面積 $S(t)$ を求めよ．

(2)　V の体積を求めよ．

【答】 (1) $8\pi\sqrt{1-t^2}$ $(-1\leqq t\leqq 1)$　(2) $4\pi^2$

【解説】

(1)　$z=t$ を代入すると，

$$(\sqrt{x^2+y^2}-2)^2+t^2\leqq 1$$

$$\iff (\sqrt{x^2+y^2}-2)^2\leqq 1-t^2$$

以下 $-1\leqq t\leqq 1$ という条件のもとで $\sqrt{1-t^2}\leqq 1$ に注意すると

$$\iff -\sqrt{1-t^2}\leqq\sqrt{x^2+y^2}-2\leqq\sqrt{1-t^2}$$

$$\iff 2-\sqrt{1-t^2}\leqq\sqrt{x^2+y^2}\leqq 2+\sqrt{1-t^2}$$

$$\iff (2-\sqrt{1-t^2})^2\leqq x^2+y^2\leqq(2+\sqrt{1-t^2})^2$$

よって切り口は半径が $R=2+\sqrt{1-t^2}$，$r=2-\sqrt{1-t^2}$ で中心が原点である 2 つの同心円の間の部分となるので，その面積 $S(t)$ は

$$\begin{aligned} S(t)&=\pi R^2-\pi r^2\\ &=\pi(R+r)(R-r)\\ &=\boldsymbol{8\pi\sqrt{1-t^2}}\ \ \boldsymbol{(-1\leqq t\leqq 1)} \end{aligned}$$

(2)　(1)より V の体積は

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^{1}8\pi\sqrt{1-t^2}\,dt\\ =&8\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,dt\\ =&8\pi\cdot\frac{\pi}{2}\\ =&\boldsymbol{4\pi^2} \end{aligned}$$

第20講　斜回転体の体積

20　関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフを曲線 C とする．

(1)　曲線 C 上の点 $\mathrm{A}\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$ における接線 l の方程式を求めよ．

(2)　曲線 C 上の点 $\mathrm{P}\left(t,\ \frac{1}{2}t^2\right)$ から l に下ろした垂線の足を H とする．H の座標と線分 PH の長さを t を用いて表せ．

(3)　l と y 軸との交点を Q とし，線分 QH の長さを s とするとき，s を t を用いて表せ．

(4)　曲線 C と直線 l と y 軸で囲まれた部分を，直線 l の周りに1回転してできる立体の体積を求めよ．

【答】　(1) $y=x-\frac{1}{2}$　(2) $\mathrm{H}\left(\frac{t^2+2t+1}{4},\ \frac{t^2+2t-1}{4}\right)$，$\mathrm{PH}=\frac{\sqrt{2}}{4}(t-1)^2$

(3) $s=\frac{\sqrt{2}}{4}(t+1)^2$　(4) $\frac{\sqrt{2}}{40}\pi$

【解説】

(1)　$y'=x$ より l の傾きは1．よって

$$y=1(x-1)+\frac{1}{2}$$

$$\therefore\quad l : \boldsymbol{y=x-\frac{1}{2}}$$

(2)　$\mathrm{H}\left(u,\ u-\frac{1}{2}\right)$ とおける．このとき $\overrightarrow{\mathrm{PH}}\perp(1,\ 1)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{PH}}\cdot(1,\ 1)=0$$

$$\iff \left(u-t,\ u-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}t^2\right)\cdot(1,\ 1)=0$$

$$\iff 2u-\frac{1}{2}t^2-t-\frac{1}{2}=0$$

$$\therefore\quad u=\frac{t^2+2t+1}{4}$$

よって

$$\boldsymbol{\mathrm{H}\left(\frac{t^2+2t+1}{4},\ \frac{t^2+2t-1}{4}\right)}$$

また線分 PH の長さは $l : x-y-\frac{1}{2}=0$ と $\mathrm{P}\left(t,\ \frac{1}{2}t^2\right)$ との距離となるので

$$\mathrm{PH}=\frac{\left|t-\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{\left|-\frac{1}{2}(t-1)^2\right|}{\sqrt{2}}$$

$$=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{4}(t-1)^2}$$

(3) QH の傾きは 1 より

$$\mathrm{QH}=\sqrt{2}\,|\mathrm{H}\text{ の }x\text{ 座標}|$$

$$\iff\quad s=\sqrt{2}\left|\frac{t^2+2t+1}{4}\right|$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{s=\frac{\sqrt{2}}{4}(t+1)^2}$$

(4) 求める体積を V とおくと,

$$\begin{aligned}V&=\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2\pi\times\frac{\sqrt{2}}{4}\times\frac{1}{3}+\int_{\frac{\sqrt{2}}{4}}^{\sqrt{2}}\pi\mathrm{PH}^2\,ds\\&=\frac{\sqrt{2}}{96}\pi+\pi\int_0^1\frac{1}{8}(t-1)^4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(t+1)\,dt\\&=\frac{\sqrt{2}}{96}\pi+\pi\int_0^1\left\{\frac{\sqrt{2}}{16}(t-1)^5+\frac{\sqrt{2}}{8}(t-1)^4\right\}dt\\&=\frac{\sqrt{2}}{96}\pi+\pi\left[\frac{\sqrt{2}}{96}(t-1)^6+\frac{\sqrt{2}}{40}(t-1)^5\right]_0^1\\&=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{40}\pi}\end{aligned}$$

第21講　体積は切る！

21 xyz 空間に5点 A(1, 1, 0), B(−1, 1, 0), C(−1, −1, 0), D(1, −1, 0), P(0, 0, 3) をとる．四角錐 PABCD の

$$x^2+y^2 \geqq 1$$

を満たす部分の体積を求めよ．

【答】 $4+4\sqrt{2}-3\pi$

【解説】

AP を $\dfrac{t}{3} : \left(1-\dfrac{t}{3}\right)$ に分ける点は

$$\left(1-\frac{t}{3}\right)(1,\ 1,\ 0)+\frac{t}{3}(0,\ 0,\ 3)$$
$$=\left(1-\frac{t}{3},\ 1-\frac{t}{3},\ t\right)$$

であるので，求める部分を $z=t$ で切った切り口の $0\leqq y\leqq x$ の範囲にあるものは

$$x\leqq 1-\frac{t}{3} \text{ かつ } 0\leqq y\leqq x \text{ かつ } x^2+y^2\geqq 1$$

を満たしていて，

$$\sqrt{2}\left(1-\frac{t}{3}\right)\geqq 1 \iff t\leqq 3\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

という条件のもとで，この領域の面積は $\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1-\frac{1}{3}t}(x-\sqrt{1-x^2})\,dx$ で求められる．

このとき，対称性に注目すると求める体積 V は

$$\frac{1}{8}V=\int_0^{3\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}\left\{\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1-\frac{1}{3}t}(x-\sqrt{1-x^2})\,dx\right\}dt$$

$x=\cos\theta$ と置換すると，$\cos\alpha=1-\dfrac{1}{3}t,\ 0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$ なる α を用いて

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1-\frac{1}{3}t}(x-\sqrt{1-x^2})\,dx$$
$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\alpha}(\cos\theta-\sin\theta)\cdot(-\sin\theta)\,d\theta$$
$$=\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{2}\sin 2\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta-\frac{1}{2}\right)d\theta$$
$$=\left[-\frac{1}{4}\cos 2\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta-\frac{1}{2}\theta\right]_{\alpha}^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\pi\right)-\left(-\frac{1}{4}\cos 2\alpha+\frac{1}{4}\sin 2\alpha-\frac{1}{2}\alpha\right)$$
$$=\frac{1}{8}(-2\sin 2\alpha+2\cos 2\alpha+4\alpha-\pi+2)$$

更に $\cos\alpha=1-\dfrac{1}{3}t$ より $dt=3\sin\alpha\,d\alpha$ であるので

$$\frac{1}{8}V=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{8}(-2\sin 2\alpha+2\cos 2\alpha+4\alpha-\pi+2)\cdot 3\sin\alpha\,d\alpha$$

$$\therefore\quad V=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\{-12\sin^2\alpha\cos\alpha+6(2\cos^2\alpha-1)\sin\alpha+12\alpha\sin\alpha-3(\pi-2)\sin\alpha\}d\alpha$$

$$=\Big[-4\sin^3\alpha+2(3\cos\alpha-2\cos^3\alpha)+12(-\alpha\cos\alpha+\sin\alpha)+3(\pi-2)\cos\alpha\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\boldsymbol{4+4\sqrt{2}-3\pi}$$

第22講　微分方程式

22　$f(x)$ は開区間 $(0,\ 1)$ で定義された関数で，この区間で $f(x)>0$, $f'(x)<0$, $f''(x)\neq 0$ を満たすとする．このとき，曲線 $y=f(x)$ 上の任意の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ における接線が x 軸，y 軸と交わる点をそれぞれ A，B，座標の原点を O とすると，OA＋OB はつねに一定になるという．

(1)　OA＋OB を $F(x)$ とするとき，$F(x)=c$ (c は定数) の両辺を x で微分することにより，微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}=-\sqrt{\dfrac{y}{x}}$ が得られることを示せ．

(2)　(1)の微分方程式の解の中で，$x=\dfrac{1}{4}$ のとき $y=\dfrac{1}{4}$ となるものを求めよ．

【答】　(1) 略　(2) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$

【解説】

(1)　$\mathrm{P}(x,\ y)$ における接線の方程式は

$$Y=f'(x)(X-x)+f(x)$$

より $\mathrm{A}\left(x-\dfrac{f(x)}{f'(x)},\ 0\right)$，$\mathrm{B}(0,\ f(x)-xf'(x))$ となるので

$$F(x)=\left\{x-\frac{f(x)}{f'(x)}\right\}+\{f(x)-xf'(x)\}$$
$$=\left\{1-\frac{1}{f'(x)}\right\}\{f(x)-xf'(x)\}$$

であるから

$$F'(x)=\frac{f''(x)}{\{f'(x)\}^2}\{f(x)-xf'(x)\}+\left\{1-\frac{1}{f'(x)}\right\}\{-xf''(x)\}$$
$$=\frac{f''(x)}{\{f'(x)\}^2}\Big[\{f(x)-xf'(x)\}+[\{f'(x)\}^2-f'(x)](-x)\Big]$$
$$=\frac{f''(x)}{\{f'(x)\}^2}[f(x)-x\{f'(x)\}^2]=0$$

ここで $f(x)=y$，$f'(x)=\dfrac{dy}{dx}$ とおくと

$$y-x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0 \iff \left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{y}{x}$$

$\dfrac{dy}{dx}<0$ より

$$\frac{dy}{dx}=-\sqrt{\frac{y}{x}}$$

(2)

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} \iff y^{-\frac{1}{2}}dy=-x^{-\frac{1}{2}}dx$$

よって積分定数 C を用いると

$$2y^{\frac{1}{2}}=-2x^{\frac{1}{2}}+C \qquad \therefore\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=\frac{1}{2}C$$

$x=y=\dfrac{1}{4}$ より

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}C \qquad \therefore \quad C=2$$

ゆえに

$$\boldsymbol{\sqrt{x}+\sqrt{y}=1}$$

第 23 講　積分でやっておきたいこと（その１）

23　曲線 $y=e^x$ の $0\leqq x\leqq 3$ に対応する部分を y 軸のまわりに回転してできる容器がある．これに毎秒 a の割合で上から水を注ぐ．

(1)　この容器に水がいっぱいになるのは何秒後か．

(2)　この水面の上昇速度が毎秒 $\dfrac{a}{4\pi}$ になった瞬間の水深を求めよ．

【答】 (1) $\dfrac{5e^3-2}{a}\pi$ 秒後　(2) e^2-1

【解説】

(1)　$0\leqq x\leqq 3$ に対応する部分は $1\leqq y\leqq e^3$ となるので，この容器の体積 V は

$$V=\int_1^{e^3}\pi x^2dy$$

で求められる．ここで，$y=e^x$ より

$$dy=e^xdx$$

などより，

$$\begin{aligned}V&=\int_0^3\pi x^2\cdot e^xdx\\&=\Big[\pi(x^2-2x+2)e^x\Big]_0^3\\&=(5e^3-2)\pi\end{aligned}$$

よって，求める時間は

$$\boldsymbol{\frac{5e^3-2}{a}\pi\ \text{秒後}}$$

(2)　水面の上昇速度 $\varDelta h$ について

$$\varDelta h\times(\text{水面の面積})=a$$

が成り立つので

$$\frac{a}{4\pi}\times\pi x^2=a$$

$$\iff\quad x=2$$

このとき水深は（$y=1$ が底であることに注意すると）

$$\boldsymbol{e^2-1}$$

第 24 講　積分でやっておきたいこと（その２）

24　$f(x)$ が $0 \leqq x \leqq 1$ で連続な関数であるとき

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$$

が成立することを示し，これを用いて定積分

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{3+\sin^2 x}dx$$

を求めよ．

【答】　$\dfrac{\pi}{4}\log 3$

【解説】

$x=\pi-t$ と置換すると

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \int_{\pi}^{0}(\pi-t)f(\sin(\pi-t))\cdot(-dt)$$

$$= \int_0^{\pi}(\pi-t)f(\sin t)dt$$

$$\therefore\quad 2\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \pi\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$$

よって

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$$

また

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{3+\sin^2 x}dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{3+\sin^2 x}dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{(2-\cos x)(2+\cos x)}dx$$

$$= \frac{\pi}{8}\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin x}{2-\cos x}+\frac{\sin x}{2+\cos x}\right)dx$$

$$= \frac{\pi}{8}\Big[\log(2-\cos x)-\log(2+\cos x)\Big]_0^{\pi}$$

$$= \frac{\pi}{8}\left[\log\frac{2-\cos x}{2+\cos x}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{\pi}{8}\left(\log\frac{3}{1}-\log\frac{1}{3}\right)$$

$$= \boldsymbol{\frac{\pi}{4}\log 3}$$

Ⓒ RECRUIT
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。